

## Algebra und Zahlentheorie.

**Blumenthal, Leonard M.:** A chain of determinant theorems arising from the characterization of pseudo  $r$ -spheric ( $S_n$ ) sets. Amer. J. Math. **56**, 225—232 (1934).

Sei  $D = |r_{ij}|$  eine mindestens 5-reihige symmetrische Determinante mit

$$-1 < r_{ij} < 1 \quad \text{und} \quad r_{ii} = 1,$$

deren 3-reihigen Hauptminoren verschwinden, während mindestens ein 4-reihiger Hauptminor nicht verschwindet. Dann kann  $D$  durch Multiplikation von  $k$  Zeilen und den entsprechenden Spalten mit  $-1$  verwandelt werden in eine Determinante, in deren Hauptdiagonale nur Einsen stehen, während alle anderen Elemente gleich  $-1/2$  sind.

Nöbeling (Erlangen).

**Ingraham, M. H.:** On the rational solutions of the matrix equation  $P(X) = A$ . J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **13**, 46—50 (1934).

A new practical method is developed for finding all solutions of the matrix equation  $P(X) = A$  where  $A$  is a square matrix with elements in a field  $F$  and  $P$  is a polynomial with coefficients in  $F$ .

MacDuffee (Columbus).

**Amato, Vincenzo:** Sulle equazioni algebriche il cui gruppo di Galois è un sottogruppo fondamentale del totale. Rend. Circ. mat. Palermo **58**, 93—103 (1934).

L'Autore interpreta nelle equazioni algebriche la teoria dei sottogruppi fondamentali del gruppo totale delle sostituzioni su  $n$  elementi, teoria che egli ha sviluppato in vari lavori [Note Esercit. Mat. **6**, 30—42, 75—81 (1931); cf. Zbl. **4**, 51]. Innanzi tutto dimostra che condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione di grado  $n$ , avente per gruppo di Galois „il sottogruppo fondamentale  $G_S$  relativo ad una sostituzione  $S$  sulle  $n$  radici (cioè il sottogruppo costituito da tutte le sostituzioni commutabili con  $S)$ “ sia irriducibile è che la  $S$  sia regolare dell'ordine  $n$ . In tal caso  $G_S$  è imprimitivo e l'equazione è „normale rispetto ai sistemi d'imprimitività“, cioè le sue radici si esprimono razionalmente per sole  $\varrho$  di esse, se  $\varrho$  è il numero dei detti sistemi; inoltre la risoluzione dell'equazione si riconduce a quella di una risolvente di grado  $\varrho$  e di  $\varrho$  equazioni cicliche di grado  $n: \varrho$ . Se  $\varrho$  non è primo, si può ampliare il campo di razionalità in maniera che il gruppo di Galois  $G_S$  si abbassi ad un suo sottogruppo  $G_{S_1}$  „fondamentale massimo“, tale cioè che nessun sottogruppo fondamentale  $G_T$  (diverso da  $G_S$  e  $G_{S_1}$ ), relativo ad una sostituzione  $T$  regolare o no, sia contenuto in  $G_S$  e contenga  $G_{S_1}$ . Così procedendo, si costruisce una cosiddetta „serie principale“ di sottogruppi fondamentali, che s'inizia con  $G_S$  e termina con un sottogruppo fondamentale ciclico  $G_{S_r}$ , essendo  $r$  il numero dei divisori primi, eguali o diseguali, di  $\varrho$ ; inoltre il numero  $r + 1$  dei termini della serie esprime ciò che, nella teoria dei sottogruppi fondamentali, è detto „il genere di  $G_S$ “.

M. Cipolla (Palermo).

**Ore, Oystein:** Errata in my paper „On a special class of polynomials“. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 275 (1934).

**Birkhoff, Garrett:** Note on the paper „On the combination of subalgebras“. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 200 (1934).

Herstellung der Beziehungen zwischen Begriffen und Sätzen der im Titel angegebenen Arbeit (dies. Zbl. **7**, 395) mit Dedekinds Theorie. R. Baer (Manchester).

**Hasse, Helmut:** Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper mit Anwendungen auf Führer und Diskriminante abelscher Zahlkörper. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **2**, 477 bis 498 (1934).

$K$  sei ein über dem Grundkörper  $k$  galoisscher algebraischer Zahlkörper endlichen Grades mit der galoisschen Gruppe  $\mathfrak{G}$ .  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{P} \mathfrak{P}' \dots)^e$ ,  $N(\mathfrak{P}) = N(\mathfrak{P}') = \dots = \mathfrak{p}'$  sei die Zerlegung eines Primideals von  $k$  in  $K$ ,  $\alpha$  bezeichne die Zahlen aus  $k$ ,  $A$  die aus  $K$ ,  $\alpha_\mu$  die Zahlen  $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}'}$



aus  $k$ ,  $A_v$  die  $\equiv 1 \pmod{(\mathfrak{P}' \dots)^v}$  aus  $K$ . Die Normenresttheorie von  $K/k$  wird in Gestalt der folgenden Fragestellung behandelt: Wie groß ist  $v$  bei gegebenem  $u$  zu wählen, damit  $N(A_v) \leq \alpha_u$ ? Der Ton liegt dabei auf den Primidealen mit höherer Verzweigung; der Fall ohne höhere Verzweigung wurde schon früher von Hensel abschließend behandelt. Die Antwort wird mittels der Invarianten der Hilbertschen Verzweigungsgruppenreihe  $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{Z}$  (Zerlegungsgruppe)  $\geq \mathfrak{Z}_0 > \mathfrak{Z}_1 > \dots > \mathfrak{Z}_r = 1$  gegeben, nämlich durch die Ordnungen  $n_\varrho$  ( $\varrho = 0, \dots, r$ ) der  $\mathfrak{Z}_\varrho$  und die Verzweigungszahlen  $v_\varrho$  ( $\varrho = 0, \dots, r+1$ ), welche als maximale Exponenten erklärt sind, für die gilt  $\Gamma^{\sigma_\varrho} \equiv \Gamma \pmod{\mathfrak{P}^{v_\varrho+1}}$  für alle ganzen  $\Gamma$  aus  $K$  und  $\sigma_\varrho$  aus  $\mathfrak{Z}_\varrho$ , speziell  $v_0 = -1$ ,  $v_{r+1} = \infty$ . Man bilde die (nicht notwendig ganzen) Zahlen

$$u_\varrho = v_\varrho + \frac{n_0}{n_\varrho}(v_1 - v_0) + \dots + \frac{n_{\varrho-1}}{n_0}(v_\varrho - v_{\varrho-1}) \quad (\varrho = 0, \dots, r+1)$$

und auf Grund davon die Funktion  $v = v(u)$  in der Weise, daß (1)  $v(u_\varrho) = v_\varrho$ , (2) im Intervall  $u_\varrho \leq u \leq u_{\varrho+1}$  die Funktion sich stetig und linear, mit der Steigung  $\frac{n_0}{n_\varrho}$ , an die Werte (1) anschließt.  $v(u)$  bildet einen von unten konvexen Polygonzug mit den echten Knickstellen  $u_\varrho$ , und nimmt für ganzzahlige  $u$  ganzzahlige Werte  $v$  an. Für die so verstandenen  $u$  und  $v$  gilt dann  $N(A_v) \leq \alpha_u$  und überdies die genauere Abschätzung:

$$[\alpha_u : N(A_v) \alpha_{u+1}] \begin{cases} = 1 & \text{für } u \neq u_\varrho, \\ \leq \frac{n_{\varrho-1}}{n_\varrho} & \text{für } u = u_\varrho \text{ soweit ganz.} \end{cases}$$

Der Beweis für diese grundlegende Tatsache stützt sich auf folgende weittragende Normenformel:

$$N(1 + \Gamma) = 1 + \sum_K S_{\bar{K}}(N_{\bar{K}}(\Gamma)) + \sum_K \sum_{v_1, \dots, v_q} S_K(N_{\bar{K}}(\Gamma^{(v_1)} \dots \Gamma^{(v_q)})).$$

Dabei bezeichnet  $S_{\bar{K}}$  die Spur von  $\bar{K}$  bis  $k$ ,  $N_{\bar{K}}$  die Norm von  $K$  bis  $\bar{K}$ ; es sind sämtliche Teilkörper  $\bar{K}$  von  $K/k$  zu berücksichtigen und in der letzten Summe für jedes feste  $\bar{K}$  gewisse Produkte aus Konjugierten zu  $\Gamma$  in der Anzahl  $q$  mit  $1 < q < [\bar{K}:k]$ . Die Formel ist eine Verallgemeinerung einer für zyklische  $K/k$  von Primzahlgrad von Takagi im gleichen Zusammenhang benutzten Relation. Die Anwendung auf Zahlen  $1 + \Gamma = A_v$  und die Untersuchung der Relativspuren  $S_{\bar{K}}$  mittels der Dedekindschen Differentendefinition ergibt die Bestätigung der obigen Behauptung. — Für den Normenrestindex  $\text{mod } \mathfrak{p}^{h+1}$

$$[\alpha : N(A) \alpha_{h+1}] = [\alpha : N(A) \alpha_0] \cdot \prod_{u=0}^h [N(A) \alpha_u : N(A) \alpha_{u+1}] \\ \leq f \cdot \prod_{u=0}^h [\alpha_u : N(A) \alpha_{u+1}]$$

folgt daraus: Der Normenrestindex  $\text{mod } \mathfrak{p}^{h+1}$  springt bei seinem Anwachsen vom kleinsten Wert  $f$  bei dem Modul  $\mathfrak{p}^0$  höchstens an den Stellen  $h = u_\varrho$  soweit sie ganzzahlig sind, und zwar höchstens auf das  $\frac{n_{\varrho-1}}{n_\varrho}$ -fache. Er übersteigt also nie die obere Grenze  $f n_0$ , die Ordnung von  $\mathfrak{Z}$ .

Für die Klassenkörpertheorie im Kleinen ergibt sich daraus: Der Index der Gruppe der Zahlnormen von  $K_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ , der  $p$ -adischen Erweiterungen von  $K/k$ , ist höchstens  $[K_{\mathfrak{p}}:k_{\mathfrak{p}}]$ ; der Führer der Normengruppe, der  $p$ -Führer von  $K/k$ , ist höchstens  $\mathfrak{p}_{ur+1}$ . — Im abelschen Fall ist der Normenrestindex  $\text{mod } \mathfrak{p}^{h+1}$  bekanntlich für hinreichend hohe  $h$  gleich  $f n_0$ . Der Vergleich mit den obigen Ergebnissen liefert daher sofort die folgenden Tatsachen: 1. Alle  $u_\varrho$

sind ganz, es gelten also die Kongruenzen  $v_{\varrho+1} \equiv v_\varrho \pmod{\frac{n_0}{n_\varrho}}$  ( $\varrho = 0, \dots, r-1$ ). 2. Der

Normenrestindex  $\text{mod } \mathfrak{p}^{h+1}$  springt an allen Stellen  $h = u_\varrho$  genau auf das  $\frac{n_{\varrho-1}}{n_\varrho}$ -fache und erreicht seinen Höchstwert  $f n_0$  genau bei  $u_r$ . 3. Der  $p$ -Führer von  $K/k$  ist genau  $\mathfrak{p}_{ur+1}$ . — Diese Sätze erlauben einen einfachen rein arithmetischen Beweis der Führer-Diskriminanten-Formel der Klassenkörpertheorie. Man übersieht nämlich hiernach auch die  $p$ -Führer der sämtlichen Teilkörper  $K$  von  $K/k$ , wenn man die Herbrandsche Ergänzung zur Hilbertschen Theorie heranzieht, welche die Invarianten  $\bar{n}_\varrho$ ,  $\bar{v}_\varrho$  von  $\bar{K}/k$  durch die Invarianten  $n_\varrho$ ,  $v_\varrho$  von  $K/k$  ausdrückt. Es ergibt sich dabei: Ist  $K$ , der früheste  $\bar{K}$  enthaltende Verzweigungskörper, so hat  $\bar{K}$  den  $p$ -Führer  $\mathfrak{p}_{ur+1}$ . Hieraus folgt in einfachster Weise unter Benutzung der Artinschen Schreibweise der  $p$ -Führer [J. reine angew. Math. **164**, 1—11 (1931); dies. Zbl. **1**, 8] die Führer-Diskriminanten-Formel.

W. Franz (Marburg, Lahn).

Iyanaga, S.: Zur Theorie der Geschlechtermoduln. J. reine angew. Math. **171**, 12—18 (1934).

Es handelt sich um eine vereinfachte Neudarstellung der von Herbrand [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **9** (1932); dies. Zbl. **3**, 294] und dem Verf. (Jap. J.



Math. 1930) entwickelten Theorie der Geschlechtermoduln und des verallgemeinerten Hauptgeschlechts. Die Theorie wird jetzt im engen Anschluß an die von Hasse gegebene, elementare explizite Führerbestimmung gebracht (erscheint demnächst in J. Coll. Science Tokyo, vorläufige Mitteilung in zwei Noten C. R. Acad. Sci., Paris 1933). Das ergibt sehr rasch die „Herbrandsche Formel“: Ist  $K/k$  abelsch,  $k \leq \Omega \leq K$ , so gilt eine Beziehung:  $\mathfrak{G}\mathfrak{f}(K/\Omega)\mathfrak{f}(\Omega/k) = \mathfrak{F}(\Omega/k)\mathfrak{f}(K/k)$ , wo  $\mathfrak{f}$  die Führer,  $\mathfrak{F}$  den Geschlechtermodul bedeutet. Das ganze Ideal  $\mathfrak{G}$  fehlte versehentlich bei Herbrand; es ist höchstens an solchen Verzweigungsstellen  $\neq 1$ , wo die Führer von  $K$  und  $\Omega$  übereinstimmen. Mit Hilfe dieser Formel und des Verschiebungssatzes der Klassenkörpertheorie werden dann die oben erwähnten Sätze abgeleitet; insbesondere ergibt sich so der Zusammenhang von Hauptgeschlecht und Kommutatorgruppe des zugehörigen zweiten Klassenkörpers und damit durch Spezialisierung — nach Artin-Furtwängler — der allgemeine Hauptidealsatz: Alle Ideale des Grundkörpers fallen im Strahlklassenkörper in den Strahl modulo dem Geschlechtermodul. (Vgl. Hasse, vorst. Ref. sowie dies. Zbl. 7, 197 u. 395.)

E. Noether (Bryn Mawr).

Rédei, L.: Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper. J. reine angew. Math. 171, 55—60 (1934).

Verf. hat früher (siehe Rédei und Reichardt, dies. Zbl. 7, 396) mit Hilfe klassenkörpertheoretischer Überlegungen bewiesen, daß die Anzahl  $e_4$  der durch 4 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe (im engeren Sinne) eines quadratischen Zahlkörpers gleich ist der Anzahl der unabhängigen  $D$ -Zerfällungen 2. Art der Diskriminante  $D$  des Körpers. Dabei wird eine Zerfällung  $D_1 D_2 = D$  eine Zerfällung 2. Art genannt, wenn  $D_1, D_2$  wieder Diskriminanten quadratischer Zahlkörper sind und  $\left(\frac{D_1}{q_2}\right) = \left(\frac{D_2}{q_1}\right) = 1$  ist für jedes  $q_i | D_i$ . Dieser Satz wird hier arithmetisch bewiesen. Der Beweis beruht auf dem folgenden Hilfssatz über Matrizen, deren Elemente  $\pm 1$  sind: Eine Menge von Zeilen einer Matrix wird eine Einheitsmenge von Zeilen genannt, wenn das Produkt der in derselben Spalte enthaltenen Elemente jeweils 1 ergibt. Analog wird eine Einheitsmenge von Spalten definiert. Enthält die Matrix  $r$  Zeilen und  $s$  Spalten und ist  $R$  und  $S$  die Anzahl der Einheitsmengen der Zeilen bzw. Spalten, so ist  $R/S = 2^{r-s}$ . — Der Beweis selbst verläuft folgendermaßen: Zunächst ist  $2^{e_4} = n/2$ , wobei  $n$  die Anzahl derjenigen verschiedenen Ideale  $\mathfrak{Q}$  bedeutet, welche einem Idealquadrat im engeren Sinn äquivalent sind und deren Norm  $Q$  ein quadratfreier Teiler von  $D$  ist.  $n$  ist weiter die Anzahl der positiven quadratfreien Zahlen  $Q | D$ , für welche die Gleichung  $u^2 Q - v^2 Q' - w^2 = 0$  eine Lösung hat, wenn  $Q'$  der quadratfreie Kern von  $DQ$  ist. Damit diese Gleichung lösbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Kongruenzen  $x^2 \equiv Q(Q')$  und  $x^2 \equiv -Q'(Q)$  lösbar sind. Das folgt aus der bekannten Lagrangeschen Bedingung.  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) seien die Primteiler von  $D$ ; die ungeraden  $p_i$  seien mit einem geeigneten Vorzeichen versehen, so daß stets  $p_i \equiv 1 \pmod{4}$  gelte, und wenn  $D$  gerade ist, so sei  $p_t = 2$ . Unter  $M_D$  wird die aus  $t - 1$  Spalten und  $t$  Zeilen bestehende Matrix verstanden, deren  $i$ -te Zeile lautet:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ p_i \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} p_{i-1} \\ p_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ p_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{i+1} \\ p_i \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} p_{t-1} \\ p_i \end{pmatrix}.$$

Es wird gezeigt, daß die Anzahl der Einheitsmengen der Zeilen dieser Matrix auch gleich  $n$  ist. Nach dem obigen Hilfssatz über Matrizen ist daher  $2^{e_4} = n_1$ , wobei  $n_1$  die Anzahl der Einheitsmengen von Spalten von  $M_D$  ist; diese ist aber gleich der Anzahl der  $D$ -Zerfällungen 2. Art.

Taussky (Wien).

Oppenheim, A.: The minima of quaternary quadratic forms of signature zero. Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 63—81 (1934).

Consider real quaternary quadratic forms  $f$  of signature zero and determinant  $\Delta$ . The forms of signature  $\pm 2$  and the forms  $f_1, f_2$  below have been treated previously



by the author [Ann. of Math. **32**, 271—298 (1931); dies. Zbl. **2**, 180]. Let  $L = L(f)$  denote the lower bound of  $|f|$  for integral values of the variables not all zero. Consider the forms  $f_1, \dots, f_8$  which are the products by  $L$  of the following:

$$t^2 - x^2 + y^2 - z^2 + xt + zt - xy + yz \text{ [misprinted on p. 63]},$$

$$t^2 - x^2 + y^2 - z^2 + xt + zt - xy + xz + 3yz, \quad t^2 + tx - x^2 + 2(y^2 + yz - z^2),$$

$$t^2 - x^2 + y^2 - z^2 + xt + zt - xy + 4yz, \quad \pm(t^2 - x^2 - 2y^2 - z^2 + xt + zt + 6yz),$$

$$t^2 - x^2 + y^2 - z^2 + xt + zt - xy + xz + 5yz, \quad t^2 + x^2 - 3y^2 - 3z^2,$$

$$t^2 + tx - x^2 + \frac{5}{2}(y^2 + yz - z^2).$$

With the possible exception of  $f_5$ , each  $f_i$  is equivalent to its negative. If  $f \sim f_i$ ,  $L^4 = \varepsilon_i \Delta$ , where  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8$  are respectively  $4/9, 4/17, 4/25, 16/117, 4/33, 1/9, 1/9, 64/625$ ; and if  $f$  is equivalent to none of these  $f_i$ ,  $10 L^4 < \Delta$ . The method of proof is to express  $f$  as a square plus a ternary section, or a sum of two squares plus a binary section. Any such section has a lower bound  $\geq L(f)$ , and known results for binary or ternary forms can be applied. The minima of binaries are related to the values of certain types of periodic continued fractions. Pall (Montreal).

**Oppenheim, A.: The minima of positive definite Hermitian binary quadratic forms.** Math. Z. **38**, 538—545 (1934).

Eine positiv definite Hermitesche Form  $F = ax\bar{x} + bx\bar{y} + \bar{b}x\bar{y} + cy\bar{y}$  der Determinante  $\Delta = ac - b\bar{b} > 0$  besitzt ein positives Minimum  $m$ , wenn  $x, y$  alle Paare ganzer Zahlen  $\neq 0, 0$  eines imaginär quadratischen Zahlkörpers  $K = K(\sqrt{-D})$  ( $D > 0$  quadratfrei) durchläuft. Der Quotient  $M = \frac{m}{\sqrt{\Delta}}$  ist dabei für jede Form  $F$

nicht größer als eine nur vom Körper  $K$  abhängige Schranke  $M(D)$ . Der genaue Wert von  $M(D)$  wurde von Speiser [Über die Minima Hermitescher Formen. J. reine angew. Math. **167**, 88—97 (1932)] für  $D=1$  und  $3$ , von Perron hierfür und weiter für  $D=2, 7, 11, 19$  [Über das Minimum positiver Hermitescher Formen. Math. Z. **36**, 148—160 (1932)], für andere  $D$  von Oberseider (s. folgendes Referat) bestimmt. Verf. stellt  $x, y$  durch die Körperbasis dar und führt so die Frage zurück auf eine über das Minimum quaternärer quadratischer Formen; mittels eines Satzes von Korkine und Zolotareff [Sur les formes quadratiques positives quaternaires, Math. Ann. **5**, 581—583 (1872)] über dieses Minimum erhält er dann: „Sei  $\mu = 1$  für  $D \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $\mu = 1/2$  für  $D \equiv 3 \pmod{4}$ . Für jedes  $D$  ist dann  $M(D) \leq \sqrt{2\mu^2 D}$ ; das Gleichheitszeichen steht hier dann und nur dann, wenn  $-2$  quadratischer Rest jedes ungeraden Primteilers von  $D$  ist; in diesem Fall gibt es Formen mit  $M = \sqrt{2\mu^2 D}$ .“ Durch diesen Satz wird  $M(D)$  für unendlichviele  $D$  bestimmt. — Zum Schluß leitet Verf. mittels elementarer Ungleichungen sehr kurz erneut den Wert von  $M(D)$  ab in den von Speiser und Perron erledigten Fällen.

Mahler (Groningen).

**Oberseider, Hannskarl: Über das Minimum positiver Hermitescher Formen.** Math. Z. **38**, 591—632 (1934).

Auch diese Arbeit ist der Bestimmung von  $M(D)$  (s. voriges Referat) gewidmet. Verf. gewinnt den Wert von  $M(D)$  für  $D=43, 67, 163$ , wo  $K(\sqrt{-D})$  die Klassenzahl  $h=1$  hat, und für  $D=5$  und  $15$ , wo  $h=2$  ist; ohne Durchführung des Beweises gibt er das Ergebnis für  $D=6, 10, 13$  mit  $h=2$  und für  $D=14$  und  $17$  mit  $h=4$ . In jedem Fall werden alle Formenklassen angegeben, für die  $M = M(D)$  ist. — Wenn  $h=1$ , so existiert eine zu  $F$  äquivalente Form  $F_1 = m|x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{m}|y|^2$ , wo  $\xi$  eine komplexe Zahl,  $m > 0$  das Minimum von  $F$  (und  $F_1$ ) ist. Verf. zeigt nun, daß sich ganze Zahlen  $x_1, y_1$  mit  $y_1 \neq 0$  aus  $K(\sqrt{-D})$  angeben lassen, so daß  $|x_1 + \xi y_1|^2 \leq 1 - \frac{2|y_1|^2}{D}$  ist; dies Paar in  $F_1$  eingesetzt, liefert die gewünschte Ungleichung  $m \leq \sqrt{\frac{\Delta D}{2}}$ , und für geeignete  $\xi$ , d. h. für geeignete Formen  $F$ , steht hier das Gleichheitszeichen. Ist  $h > 1$ ,



so gibt es nur noch eine Darstellung  $F_1 = m_0 |x + \xi y|^2 + \frac{A}{m_0} |y|^2$  für eine zu  $F$  äquivalente Form  $F_1$ , wo jetzt  $m_0$ , das „Hilfsminimum“, das Minimum von  $F$  (und  $F_1$ ) für teilerfremde ganze  $x, y \neq 0, 0$  aus  $K(\sqrt{-D})$  ist. Im Gegensatz zu  $M = \frac{m}{\sqrt{D}}$  braucht  $C_0 = \frac{m_0}{\sqrt{D}}$  nicht für alle Formen unterhalb einer nur von  $K$  abhängigen Schranke zu liegen. Man beschränkt  $\xi$  auf das Fundamentalparallelogramm des durch die ganzen Zahlen aus  $K$  erzeugten Gitters. In einem Teilbereich  $\mathfrak{A}$  hiervon kann ähnlich wie für  $h = 1$  gezeigt werden, daß  $C_0$  und erst recht  $M$  klein ist. In dem Restbereich  $\mathfrak{B}$  bleibt dagegen  $C_0 \varrho^2 + \frac{1}{C_0}$  klein, wo  $\varrho = |\xi - \eta|$  und  $\eta$  eine geeignete gewählte Zahl aus  $K$  ist, und daraus folgt wieder die gewünschte Schranke für  $M$ . Für jeden speziellen Wert von  $D$  ist das Beweisverfahren verschieden, und im Gegensatz zur vorigen Arbeit kommt man nicht zu allgemeinen Sätzen.

Mahler (Groningen).

**Besicovitch, A. S.: Sets of fractional dimensions. IV.: On rational approximation to real numbers.** J. London Math. Soc. 9, 126—131 (1934).

Sei  $q > 2$  und  $E_q$  die Menge aller reellen Zahlen  $r$  im Intervall  $(0, 1)$ , für die die Ungleichung  $\left| r - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^q}$  unendlichviele Lösungen in rationalen Zahlen  $m/n$  hat. Es wird bewiesen: „Die Dimensionszahl (dimensional number) von  $E_q$  ist  $2/q$ .“ Zum Beweis betrachtet man für positives  $\lambda$  und  $\varrho$  Mengen  $I(\lambda, \varrho)$  von Intervallen  $l < \lambda$ , für die  $\sum_{I(\lambda, \varrho)} l^q < 1$  ist, und zeigt, daß für jedes  $\lambda > 0$  und  $\varrho > 2/q$  ein  $I(\lambda, \varrho)$  existiert, das  $E_q$  enthält, daß aber für  $\varrho < 2/q$  und kleines  $\lambda$  keine Menge  $I(\lambda, \varrho)$  die Menge  $E_q$  ganz umfaßt. — Literatur: Drei Arbeiten des Verf. in den Math. Ann. über „Sets of fractional dimensions“ I, II, III; hiervon ist bisher nur die erste erschienen in Bd. 101, 161—193 (1929).

Mahler (Groningen).

**Gelfond, A.: Sur le septième problème de D. Hilbert.** C. R. Acad. Sci. URSS 2, 1—3 u. franz. Text 4—6 (1934) [Russisch].

Verf. hatte 1929 die Transzendenz von  $\omega^{\sqrt[p]{q}}$  ( $\omega \neq 0, \neq 1, p$  natürliche Zahl) bewiesen [C. R. Acad. Sci., Paris 189, 1224—26 (1929)], und dies Ergebnis war von Kuzmin (Bull. Acad. Sci. URSS 1930, Nr 6), Siegel (unveröffentlicht) und Boehle (dies. Zbl. 6, 157) verallgemeinert worden, ohne daß aber auch nur die Transzendenz von  $2^{\sqrt[2]{q}}$  gezeigt werden konnte. In dieser Arbeit gibt Verf. die Skizze eines Beweises für: „Sind  $\omega$  und  $\eta$  algebraisch,  $\omega \neq 0, \neq 1$  und  $\eta$  irrational, so ist  $\omega^\eta$  transzendent“. Damit gleichwertig: „Sind  $\alpha \neq 0, \neq 1$  und  $\beta \neq 0, \neq 1$  algebraisch, so ist  $\frac{\log \alpha}{\log \beta}$  rational oder transzendent.“ (Transzendenz des Briggschen Logarithmus!) — Beweis: Sei  $\eta = \frac{\log \alpha}{\log \beta}$  irrational, aber algebraisch. Man bestimmt mittels des Dirichletschen Schubfachverfahrens für alle hinreichend großen natürlichen  $q$  einen Ausdruck mit ganzen rationalen Koeffizienten  $f(x) = \sum_{k=-q}^q \sum_{l=-q}^q C_{kl} \alpha^{kx} \beta^{lx}$ , der nicht identisch Null ist, so daß gleichzeitig  $|C_{kl}| \leq 3^{q^2} (k, l = -q, -q+1, \dots, +q)$ , und für  $r_1 = \left\lfloor \frac{q^2}{\log q \log \log q} \right\rfloor, r_2 = \left\lfloor (\log \log q)^2 \right\rfloor$   $|f^{(s)}(t)| = \left| \sum_{k=-q}^q \sum_{l=-q}^q C_{kl} (k \log \alpha + l \log \beta)^s \alpha^{kt} \beta^{lt} \right| \leq e^{-\lambda_1 q^2 \frac{\log q}{\log \log q}} \binom{s}{t} \leq e^{-\lambda_1 q^2 \frac{\log q}{\log \log q}} \binom{s}{t}$  ist ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  sind positive, von  $q$  unabhängige Zahlen). Man hat  $|f(x)| \leq e^{q^2 + \lambda_3 q |x|}$ , ferner für alle  $s, t = 0, 1, 2, \dots$ , weil  $\alpha, \beta, \eta$  algebraisch sind:  $|f^{(s)}(t)| = 0$  oder  $\geq e^{-(\lambda_1 q^2 + \lambda_2 q t + \lambda_3 s \log q)}$ . Diese untere Schranke für  $|f^{(s)}(t)|$  ergibt zusammen mit der oberen Schranke:  $f^{(s)}(t) = 0$  für  $0 \leq s \leq r_1 - 1, 0 \leq t \leq r_2 - 1$ . Demnach ist  $f(x) \{x(x-1)(x-2) \dots (x-r_2+1)\}^{-r_1}$  eine ganze Funktion und durch das Cauchysche Integral darstellbar. Integriert man über den Kreis vom Radius  $q$ , so folgt daraus  $|f(x)| \leq e^{\frac{q^2 \log \log q}{6}}$  für  $|x| \leq q^{2/3}$  und  $|f^{(s)}(t)| \leq e^{-\frac{q^2 \log \log q}{12}}$  für  $0 \leq s \leq r_1 - 1, 0 \leq t \leq \lfloor \sqrt{q} \rfloor$ , also durch den gleichen Schluß wie vorhin:  $f^{(s)}(t) = 0$  für  $0 \leq s \leq r_1 - 1, 0 \leq t \leq \lfloor \sqrt{q} \rfloor$ . Demnach ist  $g(x) = f(x) \{x(x-1) \dots (x - \lfloor \sqrt{q} \rfloor)\}^{-r_1}$  wieder ganz und durch das Cauchysche Integral über den Kreis vom Radius  $q$  darstellbar; das gibt  $|g(x)| \leq e^{\frac{5}{6} \frac{q^{5/2}}{\log \log q}}$  für  $|x| \leq \lfloor \sqrt{q} \rfloor$ , also erst recht  $|f(x)| \leq e^{-2q^{2/3}}$ , und schließlich  $|f^{(s)}(0)| \leq e^{-q^{2/3}}$



für  $0 \leq s \leq 5q^2$ , oder  $f^{(s)}(0) = \sum_{k=-q}^{+q} \sum_{l=-q}^{+q} C_{kl} (k \log \alpha + l \log \beta)^s = 0$  für  $0 \leq s \leq 5q^2$ . Dies sind  $5q^2 + 1$  homogene lineare Gleichungen in nur  $(2q+1)^2 - 1$  Unbekannten; die Determinante des Systems, die eine Vandermondesche Determinante aus den Zahlen  $k \log \alpha + l \log \beta$  ist, verschwindet daher, und das ist ein Widerspruch, da diese Zahlen wegen der Irrationalität von  $\eta$  alle verschieden sind. — Besonders die französische Fassung der Arbeit enthält viele sinnentstellende Druckfehler, z. B.  $>$  statt  $<$  in Formel (6),  $l$  statt  $e$  in den Formeln (9)–(11), usw.

Mahler (Groningen).

**Moessner, A.:** Zahlentheoretische Untersuchungen. Tôhoku Math. J. **39**, 36–39 (1934).

Zahlenbeispiele von Gleichheiten zwischen Summen  $n$ -ter Potenzen ganzer Zahlen, welche gelten für alle Werte  $n = 1, 2, 3, \dots, m$ . Auf Beweise wird verzichtet.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Poletti, L.:** Una grande tavola di oltre 40 000 numeri primi entro due miliardi (et ultra), estratti da serie quadratiche. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **67**, 139–150 (1934).

The author announces the completion of a list 40000 primes which are values of about 200 quadratic polynomials  $ax^2 + bx + c$ , especially those for which  $(a, b, c) = (1, 1, -1)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, -1)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(1, 1, 41)$ ,  $(41, 1, 1)$   $(6, 6, 31)$ . All the primes lie between  $10^7$  and  $2 \cdot 10^9$ . The method consists in excluding, for each prime  $p$ , those values of  $x$  which make  $ax^2 + bx + c$  divisible by  $p$ . Tables are given of the distribution of primes for each of the 7 polynomials given above. References to previous works are given together with errata.

D. H. Lehmer (Stanford).

**Dawatz, W. Ch.:** Zur Frage über die Theorie der vollkommenen Zahlen. Zap. russk. naučn. Inst. Beograd Liefg. **8**, 205–227 (1933) [Russisch].

Verf. beweist zunächst den bekannten Euklid-Eulerschen Satz, daß jede gerade vollkommene Zahl der Form  $2^{n-1}(2^n - 1)$  sein muß. Dann beweist Verf.: 1. daß jede ungerade vollkommene Zahl durch die Form  $n = p^{4\mu+1}v^2$  darstellbar ist, wo  $v$  ungerade und  $p$  eine Primzahl, für welche  $1 \equiv p \pmod{4}$  ist; 2. daß jede ungerade vollkommene Zahl mindestens  $g = 4$  verschiedene Primteiler hat. Ref. bemerkt, daß auch die beiden letzten Sätze (in verallgemeinerter Form) bekannt sind: 1. steht bei L. Euler, Opera posthuma **1**, 14–15 (Verallgemeinerungen s. S. Lubelski: Problèmes et théorèmes de la théorie générale des nombres (polnisch) Aufgabe 73; dies. Zbl. **8**, 295); 2. steht bei Sylvester, C. R. Acad. Sci., Paris **106**, 522–526 (wo bewiesen ist, daß  $g = 5$  angenommen werden kann).

Lubelski (Warszawa).

**James, R. D.:** On Waring's problem for odd powers. Proc. London Math. Soc., II. s. **37**, 257–291 (1934).

This paper contains the first improvement of the results found by Hardy and Littlewood. The author has combined their method, in the form due to Vinogradoff, Landau and Gelbke, with Landau's method of proof that every sufficiently large integer is the sum of eight cubes. Let  $k$  denote an odd integer greater than or equal to 5. The first part of the paper is concerned with the representation of an integer  $n$  in the form

$$n = \sum_{i=1}^s u_i^k + \sum_{j=1}^t P(v_j), \quad u_i \geq 0, \quad N \geq v_j \geq M,$$

where

$$P(v) = N^{-1} \{ (N+v)^k + (N-v)^k - 2N^k \}$$

and  $N$  and  $M$  are integers depending on  $n$ . In fact,  $N^{k-1}$  and  $M^{k-1}$  are of the order of  $n$ . By means of straightforward modifications of the analytic method of Gelbke, the author shows that all sufficiently large integers  $n$  are sums of  $s + s_1$  non-negative  $k$ -th powers and  $t$  values of  $P(v)$ , where  $s$ ,  $s_1$ , and  $t$  satisfy various conditions. From this result and the fact that the number of primes  $d \equiv 2 \pmod{k}$  between  $x$  and  $x + \varepsilon x$  increases indefinitely with  $x$ , the author deduces that all sufficiently large numbers are sums of  $s + s_1 + 2t + 1$  non-negative  $k$ -th powers. The method of proof is a development of that of Landau for cubes. Let  $G(k)$  denote the least value of  $r$  such that all sufficiently large numbers are sums of  $r$  non-negative  $k$ -th powers. Then the author shows that

$$G(k) \leq 2^{k-2}(k-3) + k + 9 + \zeta_k,$$

where

$$\zeta_k = \left[ \frac{(k-2) \log 2 - \log k + \log(k-2)}{\log k - \log(k-1)} \right].$$



In particular,  $G(5) \leq 35$ ,  $G(7) \leq 164$ ,  $G(9) \leq 824$ , ... These values are an improvement on those previously known, namely,

$$G(k) \leq 2^{k-2}(k-2) + k + 5 + \zeta_k,$$

$$G(5) \leq 41, \quad G(7) \leq 192, \quad G(9) \leq 949, \dots$$

*E. Maitland Wright* (Oxford).

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Birkhoff, Garrett:** Applications of lattice algebra. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **30**, 115—122 (1934).

Fortsetzung der in einer früheren Arbeit [*Proc. Cambridge Philos. Soc.* **29**, 441 bis 464 (1933); dies. Zbl. **7**, 395] begonnenen axiomatischen Untersuchung von Durchschnitt (meet) und Vereinigung (join). Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen dafür, daß ein derartiges endliches System einstufig isomorph einem Mengensystem bezgl. Durchschnitts- und Vereinigungsmengenbildung ist. Angabe hinreichender Bedingungen dafür, daß eine in einem derartigen System definierte Funktion sich wie eine Maßfunktion verhält. — Gruppentheoretische Anwendung: Dann und nur dann verhalten sich die Normalteiler einer endlichen Gruppe bezgl. Durchschnitts- und Vereinigungsgruppenbildung so wie ein Mengensystem bezgl. Durchschnitts- und Vereinigungsmengenbildung, wenn die Gruppe mit keiner Gruppe homomorph ist, die zwei im Sinne von R. Remak [*J. reine angew. Math.* **162**, 1—16 (1930)] kohärente minimale Normalteiler besitzt. *Reinhold Baer* (Manchester).

**Kurepa, Georges:** Sur les ensembles ordonnés. *C. R. Acad. Sci., Paris* **198**, 882 bis 885 (1934).

Soit  $E$  un ensemble ordonné,  $m_1 E$  la plus petite puissance d'un ensemble dense dans  $E$ ,  $m_2 E$  la plus grande puissance d'une famille de segments de  $E$  n'empiétant pas les uns sur les autres et enfin  $m_3 E$  la plus petite puissance d'une famille déterminante de voisinages de  $E$ . L'auteur affirme qu'on a pour tout ensemble ordonné infini des relations

$$m_1 E \leq m_2 E = m_3 E$$

et dans le cas d'un ensemble  $E$  dense

$$m_1 E = m_2 E = m_3 E.$$

L'égalité  $m_1 E = m_2 E$  pour des ensembles denses contient comme cas particulier la solution d'un problème connu de Souslin (voir W. Sierpiński, *Les nombres transfinis.* Paris 1928, p. 153).

*A. Kolmogoroff* (Moskau).

**Sierpiński, Waclaw:** Une proposition équivalente à l'hypothèse du continu. *Publ. Math. Univ. Belgrade* **2**, 17—18 (1933).

Proof that the continuum hypothesis  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$  is equivalent to the proposition that there exists a linear, analytic set not the sum of fewer than  $2^{\aleph_0}$  sets measurable  $B$ .

*Blumberg* (Columbus).

**Sierpiński, Waclaw:** Sur une propriété des constituantes des ensembles analytiques. *Publ. Math. Univ. Belgrade* **2**, 19—22 (1933).

By utilizing ideas used in his proof of some results concerning linear analytic sets due to Sélivanowski (see this Zbl. **8**, 149) the author shows that if a linear set  $E$  is decomposed into  $\aleph_1$  disjoint (mesurable  $B$ ) constituents:  $E = \sum_{\alpha < \Omega} Q^\alpha$  and  $N$

is a set containing one point from each nonvacuous  $Q^\alpha$ , then every linear set homeomorphic with  $N$  is of zero measure. The set  $N$  is of the first (Baire) category and can be used to give an example of a set of the power of the continuum (if  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ) of which every continuous image is of zero measure. *T. H. Hildebrandt* (Ann Arbor).

**Lusin, N.:** Sur une propriété nouvelle des ensembles mesurables  $B$ . *C. R. Acad. Sci., Paris* **198**, 1116—1118 (1934).

A method of argument by infinite descent analogous to the classical method of Fermat is useful in the demonstration of certain theorems of the theory of functions



which one does not know how to demonstrate otherwise. Consider a property  $P$  of sets of points, true for some sets, false for others, expressed in a phrase  $P = ph()$ , written in a finite number of words. This property  $P$  is true for a given set  $E$ , if its denial for any part  $E'$  of  $E$  implies there is an aliquot part  $E_1$  of  $E'$  for which the property is false, and if the infinite descent  $E, E_1, E_2, \dots$  is impossible. The method is used by Borel in his proof that the set of real numbers is non-enumerable, and by several other writers in a variety of situations. A new application is provided by the following theorem, stated without proof. Two plane disjoint sets  $E, \mathcal{E}$  are mutually entangled (*enchevêtrées*) if there is on the axis  $OY$  a non-enumerable set  $H$  such that for any decomposition of  $H$  in two parts  $H_1, H_2$  there is always a line  $x = x_0$  which cuts  $E$  and  $\mathcal{E}$  in two linear sets whose projections on  $OY$  separate  $H_1$  and  $H_2$ . Then a Borel measurable set and its complement are never mutually entangled.

*Chittenden* (Iowa).

**Brunold, M. Ch.: Contribution à l'étude de quelques catégories d'ensembles totalement discontinus définis par des conditions géométriques.** Bull. sci. École polytechn. Timișoara 5, 12—37 (1934).

Die ebene Menge  $E$  habe eine der beiden Eigenschaften: (A) zu jedem Punkt von  $E$  gibt es ein lokales Koordinatensystem, so daß für alle Punkte  $(x, y)$  von  $E$  in einer Umgebung des Nullpunktes eine Ungleichung  $ax^k < y < b$  mit  $1 < k < 2$  gilt; (B) der Radius eines Kreises durch drei Punkte von  $E$ , deren Abstand höchstens  $\varepsilon$  ist, wächst mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen unendlich. Für Kurven bedeuten beide Eigenschaften unendliche Krümmung in allen Punkten. Für (B) wird — in unnötig verwickelter Weise — bewiesen, daß  $E$  kein Kontinuum enthalten kann. Für (A) wird nur behauptet, daß  $E$  mit jedem regulären Bogen höchstens endlich viele Punkte gemeinsam hat. Dieser Satz ist aber falsch. Gegenbeispiel: Die lineare Menge  $x = 1/n, n = 1, 2, \dots$

*Willy Feller* (Kopenhagen).

**Bouligand, Georges: Critères de discontinuité pour les ensembles ponctuels.** Bull. sci. École polytechn. Timișoara 5, 38—40 (1934).

1. Eine Bedingung dafür, daß die abgeschlossene Hülle einer Menge punktförmig ist. 2. Zugleich mit einer Menge erfüllt auch ihre abgeschlossene Hülle die Bedingung (B) des vorstehenden Referats (nicht aber notwendig (A)).

*Willy Feller.*

**Haslam-Jones, U. S.: On transitive relations between points of a set.** J. London Math. Soc. 9, 157—160 (1934).

$P(x, y)$  denoting a relation which holds between two points  $x, y (x < y)$  of a set  $E$ , the relation is called: 1° transitive if  $P(x, y)$  and  $P(y, z)$  together imply  $P(x, z)$  with  $x < y < z$ , and: 2° measurable if the set of points  $(x, y)$  for which  $P(x, y)$  is true, is a plane measurable set. Further: 3°  $P$  holds approximately ( $\lambda$ ) at  $x$  if the set of points  $y$  for which  $P(x, y)$  is false, has upper right-hand density at  $x \leq 1 - \lambda$ ; 4°  $P$  holds uniformly over the set  $E$  if a positive  $\delta$  can be so chosen that for all  $x$  of  $E$   $P(x, y)$  is true for all points  $y$  of  $E$  in  $(x, x + \delta)$ . The author proves: If a measurable transitive relation  $P$  holds approximately ( $\lambda$ ), for some  $\lambda > 0$ , at all points of a measurable set  $E$ , then for any  $\vartheta > 0$  there can be found a set  $H$  in which  $P$  holds uniformly, such that  $m(H) > (1 - \vartheta) m(E)$ . From this result follows as a corollary the known theorem: A measurable function  $f(x)$  is approximately differentiable at almost all points at which any one of its approximate derivatives is finite. Cf. Burkill and Haslam-Jones, Proc. London Math. Soc., II. s. 32, 346—355 (1931); this Zbl. 2, 20.

*Ridder.*

**Prasad, Ganesh: On Lebesgue's integral mean-value for a function having a discontinuity of the second kind.** Proc. Benares Math. Soc. 14, 1—6 (1932).

Voir ce Zbl. 8, 150. La proposition: „Si la limite  $\Phi(+0)$  de la fonction  $\Phi(t)$  n'existe pas, même en dehors d'un ensemble (des valeurs de  $t$ ) dont la mesure est nulle, l'équation

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_0^h |\Phi(t) - A| dt = 0$$



ne peut avoir lieu pour aucune valeur constante de  $A''$  ne semble pas être juste dans le cas général.

*F. Leja* (Warszawa).

**Sudan, Gabriel:** Sur certains nombres principaux. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 237—241 (1933).

The family of principal numbers common to all the functions  $f_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3 \dots$ ) of a sequence of transfinite arithmetical functions defined by the author (Math. Ann. 105, 40; this Zbl. 2, 184) includes numbers which are not initial numbers. *Chittenden*.

**Stephens, Rothwell:** Note on a problem of Fréchet. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 65—68 (1934).

The solution of the problem: Characterize those sets which admit a non-constant real-valued continuous function, given by Urysohn for Hausdorff spaces and extended by Chittenden to topological spaces in general has reference to the neighborhood definition of continuous function given by Fréchet. A solution is given here for functions continuous in the sense of Sierpiński, Math. Ann. 97, 34, 337.

*Chittenden* (Iowa).

**Ostrowski, Alexandre:** Sur les multiplicités des zéros des fonctions indéfiniment dérivables de deux variables. Bull. Sci. math., II. s. 58, 64—72 (1934).

The principal result is that if  $F$  is a given, planar, closed set, there exists a function  $\Phi(x, y)$  having partial derivatives of all orders at all the points of the plane, such that  $\Phi$  is 0 in  $F$  and positive outside of  $F$ .

*Blumberg* (Columbus).

**Szpilrajn, Edward:** Reconnaissance du droit d'auteur. Fundam. Math. 22, 319 (1934).

Verf. weist darauf hin, daß das Resultat seiner Note bereits in der Arbeit von B. Jurek, Mém. Soc. Roy. sci. Bohême 1931, Nr 27 (dies. Zbl. 5, 391) enthalten ist.

**Ridder, J.:** Über die gegenseitigen Beziehungen verschiedener approximativ stetiger Denjoy-Perron-Integrale. Fundam. Math. 22, 136—162 (1934).

L'auteur considère diverses généralisations des intégrales de Denjoy. Une fonction approximativement continue  $G(x)$  est dite intégrale indéfinie ( $\alpha$ ) d'une fonction  $G(x)$  dans un intervalle  $(a, b)$  lorsque: 1° l'intervalle  $(a, b)$  peut être décomposé (à un ensemble dénombrable près) en une suite  $\{P_k\}$  d'ensembles parfaits tels que a)  $G(x)$  est absolument continue sur chaque  $P_k$ , b) la série des oscillations de  $G(x)$  sur les intervalles contigus à  $P_k$  est convergente; 2° la dérivée de  $G(x)$  est presque partout égale à  $f(x)$ . En supprimant dans cette définition la condition b) et en remplaçant dans la condition 2° la dérivée ordinaire par la dérivée approximative on obtient la définition de l'intégrale indéfinie ( $\beta$ ). Enfin, en remplaçant la condition b) par la condition que  $G(x)$  est une fonction presque partout dérivable au sens ordinaire on obtient la définition de l'intégrale indéfinie ( $\beta^\circ$ ). Ces trois intégrales constituent respectivement des généralisations de l'intégrale de Denjoy-Perron, de celle de Denjoy-Khintchine et d'un procédé d'intégration imaginé par Khintchine, intermédiaire entre les deux autres. L'auteur établit quelques théorèmes pour les intégrales ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) et ( $\beta^\circ$ ), analogues à ceux concernant les intégrales de Denjoy. A titre d'exemple nous en citons les suivants: I. Une fonction approximativement continue est une intégrale indéfinie ( $\alpha$ ) lorsqu'elle possède en tout point, à un ensemble dénombrable près, pour au moins un côté deux nombres dérivés extrêmes finis. II. Une fonction approximativement continue est une intégrale indéfinie ( $\alpha$ ) dans un intervalle  $(a, b)$  lorsque: 1° cet intervalle (à un ensemble dénombrable près) peut être décomposé en une suite d'ensembles parfaits tels que  $F(x)$  est continue sur chacun d'eux, 2°  $F(x)$  possède en tout point soit pour au moins un côté deux nombres dérivés extrêmes finis, soit un nombre dérivé extrême bilatéral fini; cette propriété pouvant ne pas être exacte pour un ensemble dénombrable de points. En suite l'auteur donne des définitions des intégrales ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) et ( $\beta^\circ$ ) basées sur autres idées; notamment sur la méthode „constructive“ de M. Denjoy et sur



celle des fonctions majorantes et minorantes [cf. aussi Ridder, *Fundam. Math.* **21**, 1—10 (1933), ce Zbl. **8**, 109; Burkill, *Math. Z.* **34**, 270—278 (1931), ce Zbl. **2**, 386] *Proc. London Math. Soc.* (2) **34**, 314—322 (1932), ce Zbl. **5**, 392]. Saks.

**Ridder, J.:** Über die  $T$ - und  $N$ -Bedingungen und die approximativ stetigen Denjoy-Perron-Integrale. *Fundam. Math.* **22**, 163—179 (1934).

Dans cette ouvrage qui se rattache aux deux mémoires précédents de M. Ridder [Fundam. Math. **22**, 136—162 (1934), le réf. préc.; Fundam. Math. **21**, 1—10 (1933), ce Zbl. **8**, 109], l'auteur donne quelques conditions pour qu'une fonction soit une intégrale indéfinie au sens  $(\alpha)$  ou  $(\beta)$ . P. ex. I. Pour qu'une fonction  $F(x)$  approximativement continue et à variation bornée généralisée au sens restreint soit une intégrale indéfinie  $(\alpha)$  il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition  $(N^\infty)$  c.-à-d. que l'ensemble des valeurs qu'elle prend aux points où la dérivée  $F'(x)$  existe et est infinie soit de mesure nulle. — II. Pour qu'une fonction  $F(x)$  approximativement continue et à variation bornée généralisée (au sens large) soit une intégrale indéfinie  $(\beta)$  dans un intervalle  $(a, b)$  il faut et il suffit que cet intervalle (à un ensemble dénombrable près) soit la somme d'une suite d'ensembles parfaits  $\{T_k\}$ , tels que 1° la fonction  $F(x)$  soit continue sur chaque  $T_k$ , 2°  $T$  désignant un sous-ensemble parfait quelconque d'un  $T_k$  l'ensemble des valeurs que  $F(x)$  admet aux points de  $T$  où la dérivée  $F'_T(x)$  par rapport à  $T$  existe et devient infinie soit de mesure nulle. — III. Soit  $F(x)$  une fonction approximativement continue dans  $(a, b)$  et supposons que l'intervalle  $(a, b)$  à un ensemble dénombrable près peut être décomposé en une suite d'ensembles parfaits tels que  $F(x)$  soit continue sur chacun d'eux. Supposons, de plus, que, à un ensemble dénombrable près,  $F(x)$  possède en tout point de  $(a, b)$  un nombre dérivé à droite fini  $g(x)$  intégrable  $(\alpha)$  dans cet intervalle. Alors  $F(x)$  est une intégrale indéfinie  $(\alpha)$  de  $g(x)$ . Ce résultat est une généralisation d'un théorème bien connu de Lebesgue. Un théorème analogue est prouvé pour l'intégrale  $(\beta)$ . — Au début de l'article l'auteur établit quelques théorèmes concernant les conditions  $(N)$ ,  $(N^\infty)$ ,  $(T_1)$  pour les fonctions continues au sens de Darboux Saks (Warszawa).

**Viola, Tullio:** Studi recenti intorno al concetto d'integrale. *Boll. Un. Mat. Ital.* **13**, 110—118 (1934).

## Analysis.

● **Cipolla, Michele:** Lezioni di calcolo infinitesimale date nella r. università di Palermo nell'anno scolastico 1932—33. Palermo: G. Castiglia 1933. VIII, 432 S.

**Scheffer, M.:** Berechnung von einigen bestimmten Integralen. *Mathematica* Leiden **1**, 185—190 (1933); **3**, 42—48 (1934) [Holländisch].

**Kitagawa, Tosio:** On a continuity of function of many real variables. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. **16**, 111—116 (1934).

**Kitagawa, Tosio:** On some class of weighted means. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. **16**, 117—126 (1934).

Der Verf. gibt eine axiomatische Charakterisierung von Mittelwerten der Form

$$M_n \left( \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{w_1 w_2 \dots w_n} \right) = g^{-1} \left( \frac{\varphi(w_1) g(x_1) + \dots + \varphi(w_n) g(x_n)}{\varphi(w_1) + \dots + \varphi(w_n)} \right),$$

wo  $a \leq x_i \leq b$ ,  $0 \leq w_i < W (\leq \infty)$ . Dabei ist  $g(x)$  in  $a \leq x \leq b$  stetig und eigentlich monoton und  $\varphi(w)$  ist in  $0 \leq w < W$  stetig und eigentlich monoton und genügt  $\varphi(0) = 0$ ,  $\lim_{w \rightarrow W} \varphi(w) = \infty$ . (Eine kleine Modifikation der Axiome ist notwendig mit Rücksicht auf die Möglichkeit, daß eine oder mehrere  $w_i = 0$  sind.) Er stützt sich dabei auf eine Charakterisierung von Mittelwerten ohne Gewichte von Nagumo und Kolmogoroff. Eine Erweiterung auf unendliche Folgen führt zu einer axiomatischen Charakterisierung



gewisser Limitierungsverfahren. (Der Beweis auf S. 124 scheint jedoch lückenhaft zu sein, da der Schluß Z. 9 v. u. durch kein Axiom gerechtfertigt ist.) *B. Jessen.*

**Popoviciu, Tiberiu:** Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles. *Mathematica, Cluj* 8, 1—85 (1934).

$f(x)$  sei eine reelle, im Intervall  $(a, b)$  definierte Funktion. (Verf. spricht die meisten seiner Resultate für Funktionen aus, die in einer beliebigen beschränkten linearen Menge definiert sind.)  $x_0, \dots, x_n$  seien verschiedene Punkte von  $(a, b)$ . Dann versteht man unter dem  $n$ -ten Differenzenquotienten (der  $n$ -ten Steigung) von  $f$  die durch die Rekursionsformel

$$[x_0, \dots, x_n; f] = \frac{[x_1, \dots, x_n; f] - [x_0, \dots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0}, \quad [x_0; f] = f(x_0)$$

definierte (in  $x_0, \dots, x_n$  symmetrische) Größe [vgl. z. B. Nørlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung (Berlin 1924) S. 8—9]. Die Arbeit befaßt sich mit Funktionen, deren  $n$ -te Differenzenquotienten gewissen Beschränkungen unterworfen sind, und zwar: 1. Funktionen mit beschränktem  $n$ -ten Differenzenquotienten. Das sind für  $n = 0$  die beschränkten und für  $n = 1$  die Funktionen, die einer Lipschitzbedingung genügen. 2. Funktionen, deren  $(n + 1)$ -ter Differenzenquotient stets nichtnegativ oder stets positiv ist. Für  $n = 0$  hat man die monotonen, für  $n = 1$  die stetigen konvexen Funktionen. 3. Funktionen von beschränkter  $n$ -ter Variation. Darunter wird folgendes verstanden: Es sei  $a < x_0 < \dots < x_N < b$  eine beliebige Einteilung von  $(a, b)$  mit  $N > n$ . Dann soll die obere Grenze von

$$\sum_{p=0}^{N-n-1} |[x_{p+1}, \dots, x_{p+n+1}; f] - [x_p, \dots, x_{p+n}; f]|$$

— das ist die  $n$ -te Variation von  $f$  in  $(a, b)$  — endlich sein. Für  $n = 0$  hat man die gewöhnlichen Funktionen beschränkter Variation und für  $n = 1$  die von Winternitz [Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 69. 249 (1917)] untersuchten Funktionen beschränkter Drehung. Die zahlreichen Resultate der Arbeit sind in der Hauptsache natürliche Verallgemeinerungen von in den Fällen  $n = 0$  und 1 bekannten Sätzen. Es seien erwähnt: Jede Funktion  $f$  von beschränkter  $n$ -ter Variation ist Differenz von zwei Funktionen  $n$ -ter Ordnung, deren  $n$ -te Variationen überdies die von  $f$  nicht übersteigen. Jede Funktion  $n$ -ter Ordnung ist  $n - 2$ mal stetig differenzierbar und ihre  $(n - 2)$ -te Ableitung ist konvex im gewöhnlichen Sinne. Hierbei werden (in der Arbeit bewiesene) Sätze von Stieltjes und Verschärfungen davon verwendet, die die Darstellung der  $k$ -ten Ableitung als Grenzwert von  $k$ -ten Differenzenquotienten betreffen. Es muß jedoch bemerkt werden, daß sowohl die obigen Begriffsbildungen als auch die darauf bezüglichen Resultate nicht neu sind; sie finden sich in allem wesentlichen in der Dissertation von Eberhard Hopf: Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften (Berlin 1926). Darüber hinaus gehen Abschätzungen der ersten Ableitung einer Funktion  $n$ -ter Ordnung in gewissen von  $n$  abhängigen Teilintervallen des Definitionsintervalls. Ferner: Verlangt man nur, daß die  $(n + 1)$ -ten Differenzenquotienten mit äquidistanten Argumenten nichtnegativ sind, so erhält man Funktionen, die den konvexen Funktionen im Jensenschen Sinne entsprechen. Sie sind wie die letzteren stetig — und dann Funktionen  $n$ -ter Ordnung im obigen Sinne — wenn sie beschränkt oder meßbar sind. — In einem zweiten Abschnitt wird ein Teil der obigen Begriffsbildungen und Resultate auf Funktionen von zwei Variablen übertragen. Unter anderem ergeben sich Verallgemeinerungen von Sätzen von Montel (vgl. dies. Zbl. 3, 392) und Kritikos (vgl. dies. Zbl. 4, 343) über zweifach konvexe Funktionen. *W. Fenchel.*

**Cammarata, Angelo:** Sulla decomposizione secondo Hermite delle funzioni razionali. *Esercit. Mat., II. s. 7, 77—83* (1934).

Die Partialbruchzerlegung wird so angesetzt, daß der rational ausintegrierbare Bestandteil zuerst abgespalten wird. *Ott-Heinrich Keller* (Berlin).

**Whitney, Hassler:** Derivatives, difference quotients, and Taylor's formula. *Bull. Amer. Math. Soc.* 40, 89—94 (1934).

This paper contains the proof of the following two theorems — converses of the well known properties of differentiable functions and polynomials. I. A necessary and sufficient condition that  $f(x)$ , defined and measurable in the closed interval  $I$ , be a polynomial of degree  $\leq m - 1$  is:  $\Delta_h^m f(x) \rightarrow 0$  uniformly in  $I$  ( $h \rightarrow 0$ ). II.  $f(x)$  being as above, a necessary and sufficient condition that  $f^{(m)}(x)$  exist and  $= f_m(x)$  is:  $\Delta_h^m f(x) \rightarrow f_m(x)$  uniformly in  $I$ . (The condition of measurability in Th. I is essential.) Here

$$\Delta_h^p f(x) \text{ (difference quotient)} = \frac{1}{h} [\Delta_h^{p-1} f(x + h) - \Delta_h^{p-1} f(x)] \quad (\Delta_h^0 f(x) = f(x)).$$



The proof is based on the discussion of the relation

$$f_0(x+h) = f_0(x) + \frac{h}{1!} f_1(x) + \dots + \frac{h^m}{m!} f_m(x) + R(x, h) \quad (f_i(x) \text{ defined in I}),$$

where the assumption  $R(x, h) h^{-m} \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) uniformly in I enables us to conclude that  $\Delta_h^p f_0(x) \rightarrow f_p(x)$  uniformly, and  $f_p(x)$  is continuous ( $p = 0, 1, \dots, m$ ). This discussion is supplemented by the following lemma.  $f(x)$  being as above, with  $\Delta_h^m f(x) \rightarrow 0$  uniformly, if the polynomial  $P(x)$ , of degree  $\leq m-1$ , coincides in value with  $f(x)$  at the points  $x_i = a + r_i t$  ( $a, t$  fixed;  $r_1, \dots, r_m$  given rational numbers), then, for any rational  $r$   $f(a + rt) = P(a + rt)$ . The above results hold also in an open interval.

*J. Shohat* (Philadelphia).

**Germa, R.-H.-J.:** Application de la méthode des résidus à la généralisation de la formule de Lagrange. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3, 8—11 u. 26—28 (1934).

L'application des méthodes connues de Cauchy permet à l'auteur de retrouver dans cette note, d'une manière très heureuse, les résultats obtenus par lui antérieurement (Bull. Ac. Sci. Belg. (5), t. XIV—XVII) et concernant les généralisations suivantes de l'équation de Lagrange:

$$z - a = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(z), \quad (1); \quad z - a = F(\alpha \theta(z)). \quad (2)$$

*W. Gontscharoff* (Moskau).

**Walsh, J.-L.:** Sur l'interpolation par fonctions rationnelles. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1377—1378 (1934).

Es seien  $C_0$  und  $C_1$  analytische Jordankurven in der  $z$ -Ebene,  $C_1$  liege im Inneren von  $C_0$ . Bezeichnet  $u$  die Potentialfunktion, für welche

$$u = 0 \quad \text{auf } C_0, \quad u = 1 \quad \text{auf } C_1$$

gilt, so können Stellenfolgen

$$\alpha_{\nu n} \quad \text{auf } C_0, \quad \beta_{\mu n} \quad \text{auf } C_1 \quad (1 \leq \nu \leq n, 0 \leq \mu \leq n; n = 1, 2, 3, \dots)$$

derart bestimmt werden, daß im Inneren des von  $C_0$  und  $C_1$  begrenzten Ringgebietes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{\mu=0}^n (z - \beta_{\mu n}) \prod_{\nu=1}^n (z - \alpha_{\nu n})^{-1} \right|^{\frac{1}{n}} = \exp \left( -\frac{2\pi}{\tau} u \right)$$

gilt,  $\tau > 0$  konstant. — Es sei  $f(z)$  im Inneren der Niveaulinie  $u = c$  ( $0 < c < 1$ ) regulär. Die rationalen Funktionen

$$(b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n) \prod_{\nu=1}^n (z - \alpha_{\nu n})^{-1},$$

welche  $f(z)$  in den Punkten  $\beta_{\mu n}$  interpolieren, konvergieren für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $f(z)$ , und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich, der im Innern der obigen Niveaulinie liegt. — Ein Satz von Hilbert bzw. von Fejér ergeben sich hieraus als Spezialfälle.

*Szegő* (Königsberg, Pr.).

**Grimshaw, M. E.:** A note on Cesàro summation of integrals. J. London Math. Soc. 9, 94—102 (1934).

Es sei die Existenz aller nachfolgenden (Lebesgueschen) Integrale, sofern sie über endliche Intervalle erstreckt sind, vorausgesetzt. Für  $k > -1$  heißt  $\int_a^\infty u(t) dt$  ( $a > 0$ ) summabel  $(C, k)$  bzw. beschränkt  $(C, k)$ , wenn

$$\omega^{-k} \int_a^\omega u(t) (\omega - t)^k dt$$

für  $\omega \rightarrow +\infty$  konvergiert bzw. beschränkt bleibt. Verf. beweist das folgende Theorem. Ist das obige Integral beschränkt  $(C, k)$ , so ist

$$\int_a^\infty u(t) t^{-\beta} dt \quad (\beta > 0)$$



summabel  $(C, k)$  mit der Summe

$$\frac{\Gamma(k + \beta + 1)}{\Gamma'(k + 1)\Gamma'(\beta)} \int_a^\infty x^{-k-\beta-1} dx \int_a^x u(t) (x-t)^k dt.$$

Für  $k = 0$  folgt dies aus dem Dirichletschen Konvergenzkriterium, für positives ganzes  $k$  aus einem Satz von Hardy [Messenger of Math. **40**, 108 (1910)]. Als Beispiel werden die Integrale

$$\int_1^\infty e^{2t} \cdot \cos e^t \cdot t^{-\alpha} dt \quad (\alpha = 0 \text{ und } \alpha = 1)$$

behandelt.

Szegő (Königsberg, Pr.).

**Bochner, S.:** An extension of a Tauberian theorem on series with positive terms. J. London Math. Soc. **9**, 141—148 (1934).

Es wird der Hardy-Littlewoodsche Satz: „Sei

$$0 < \varphi(cx) \sim \varphi(x) \quad \text{für jedes } c > 0, x \rightarrow \infty; \quad (\text{I})$$

aus

$$\int_0^\infty e^{-t/x} d\{A(t)\} \sim A \int_0^\infty e^{-t} d\{t^\alpha\} x^\alpha \varphi(x), \quad \alpha > 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{II})$$

und  $A(x)$  nicht abnehmend, folgt  $A(x) \sim Ax^\alpha \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ “ nach dem N. Wiener-schen Muster verallgemeinert, indem der Kern  $e^{-t/x}$  in (II) durch  $W(t/x)$  ersetzt wird,

wo  $W(t)$  den Bedingungen  $\int_0^\infty W(t) t^{\alpha-1+i\beta} dt \neq 0$  für jedes  $\beta$  und  $t^{\alpha-1}W(t) = O(1/t(\log t)^{p+4})$ ,

$t \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ , genügen soll, und dabei muß  $\varphi(x)$  außer (I) noch der Bedingung

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(e^n)}{1 + |x - n|^{p+1}} \leq c \varphi(e^x) \quad \text{für jedes } x, (p = 1, 2, 3, \dots) \text{ Genüge leisten. } \text{Karamata.}$$

**Shohat, J., and C. Winston:** On mechanical quadratures. Rend. Circ. mat. Palermo **58**, 153—160 (1934).

Die Christoffelschen Zahlen  $H_{i,n}$  der Gauß-Jacobischen mechanischen Quadratur werden im Falle der Jacobischen, Laguerreschen und Hermiteischen Belegungen untersucht und insbesondere nach oben und unten abgeschätzt. Die Schranken hängen zunächst von den entsprechenden Nullstellen ab; durch geeignete Nullstellenabschätzungen ergeben sich sodann gewisse nur von  $i$  und  $n$  abhängige Schranken. (Die auf S. 155 benutzte untere Schranke für die größte Nullstelle des  $n$ -ten Laguerreschen Polynoms findet sich bei W. Hahn, Diss. S. 227. Berlin 1933; dies. Zbl. **7**, 411.) Die untere Abschätzung hängt mit der Diskussion der an und für sich bemerkenswerten Summen

$\sum_{i=0}^n \varphi_i^2(x)$  zusammen, wobei  $\varphi_i(x)$  die normierten Polynome sind. Sie werden im besonderen Falle der Hermiteischen Polynome eingehender untersucht. In demselben Falle wird noch eine interessante Trennungseigenschaft der  $H_{i,n}$  bewiesen. Bei den Beweisen spielt die Differentialgleichung der betreffenden Polynome eine wesentliche Rolle.

Szegő (Königsberg, Pr.).

**Geronimus, J.:** Sur quelques propriétés extrémales des polynômes. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 887—889 (1934).

This Note gives (without proof) the solution of the following problem. Among

all polynomials  $P(x) = \sum_{i=0}^n A_{n-i} x^i$ , of degree  $\leq n$ , satisfying the relation

$$(\text{I}) \quad L(P) = \int_{-1}^1 |P(x)| dx = 1, \text{ find one for which } |\omega(P)| = \left| \sum_{i=0}^s a_i A_i \right| \text{ is maximum}$$

$\left(s \leq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ , where the  $a$ 's are certain given real numbers. The desired maximum and the corresponding polynomial are given in terms of the absolutely greatest root and the coefficients of a certain secular equation, the latter coefficients expressed explicitly as functions of the  $a$ 's. The general results are then applied to finding, under (I), the extremal values of some of the coefficients  $A_0, A_1, \dots$  of  $P(x)$ . Finally the asymptotic case is discussed:  $n \rightarrow \infty$ ,  $s$  finite.

J. Shohat (Philadelphia).



**Gernonimus, J.:** Sur quelques propriétés extrémales de polynomes dont la variation totale est donnée. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1205—1206 (1934).

The author deals with the extremal values of the linear expression  $\omega(P) \equiv \sum_{i=0}^s a_i A_i$  ( $a_i$  given) formed with the coefficients of a polynomial  $P(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^{n-i}$  subject to the condition  $\int_{-1}^1 |p'(x)| dx = 1$ . The problem can be reduced to that treated by the author in a previous Note ( $\int_{-1}^1 |P(x)| dx = 1$ ; *ibid.*, 887—889; the *preced. report*), and the results thereof are applicable, if we replace  $n, a_k$  resp. by

$$n-1, \quad \frac{a_k}{n-k} \quad \left(0 \leq k \leq s \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right).$$

Special application is made to polynomials monotonic over  $(-1, 1)$ . *J. Shohat.*

**Germa, R. H.:** Essai sur le principe des travaux virtuels. *Mathematica*, Cluj 8, 126—133 (1934).

The paper contains an elementary exposition of virtual work with the object of avoiding the loose nomenclature and lack of rigor which all too frequently mars the usual treatment of this subject. *Daniel C. Lewis jr.* (Baltimore, Maryland).

**Leja, F.:** Sur les séries de polynômes homogènes bornées sur un segment rectiligne. *Rend. Circ. mat. Palermo* 58, 144—150 (1934).

L'A. démontre le théorème suivant: supposons que la série

$$\sum P_n(x, y) \quad P_n(x, y) = a_{n,0} x^n + a_{n-1,1} x^{n-1} y + \dots + a_{0,n} y^n \quad (1)$$

soit bornée presque partout sur un segment  $AB$ . Dans ces conditions (1) converge dans  $\Delta(AB)$  défini comme il suit:  $C$  étant le milieu de  $AB$ ;  $A', B', C'$  les symétriques par rapport à 0 de  $A, B, C$ ;  $M$  le centre de  $ACB'C'$  et  $M'$  le symétrique de  $M_1$  — on désigne par  $\Delta(AB)$  le domaine dont la frontière est composée de  $AB, A'B'$  et des paraboles  $p$  et  $p'$  passant respectivement par  $A, M, B'$  et  $A', M', B$  et dont les axes sont parallèles à  $AB$ ;  $\Delta(AB)$  contient l'origine. — L'A. démontre l'existence des séries (1) admettant  $\Delta(AB)$  comme vrai domaine de convergence (le vrai domaine de convergence est l'ensemble de tous les points dans le voisinage desquels (1) converge uniformément).

*Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Krein, M.:** Über das Spektrum der Jakobischen Form in Verbindung mit der Theorie der Torsionsschwingungen von Walzen. *Rec. math. Moscou* 40, 455—465 u. dtsch. Zusammenfassung 466 (1933) [Russisch].

This paper contains many results concerning orthogonal Tchebycheff polynomials, interesting and important from the theoretical point of view, as well as from the point of view of applications — to some oscillation problems in Engineering Mechanics. Such problems lead to the Jacobian form

$$J \equiv J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} 2b_i x_i x_{i+1} \quad (b_i > 0), \quad (1)$$

and the frequencies of the fundamental harmonic oscillations in question are determined by means of the zeros of the characteristic determinant for (1):

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 - x & -b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b_1 & a_2 - x & -b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -b_2 & a_3 - x & -b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -b_{n-1} & a_n - x \end{vmatrix}. \quad (2)$$

The author shows — and this is the main point in his discussion — that the polynomials (2) satisfy the following recurrence relation, of the type well known in the theory of orthogonal polynomials:

$$D_k(x) = (a_k - x) D_{k-1}(x) - b_{k-1}^2 D_{k-2}(x) \quad (k = 2, 3, \dots, n; D_0 = 1; D_1 = a_1 - x). \quad (3)$$

(3) yields at once the behavior of the zeros of  $D_n(x)$ . He then proceeds to investigate the spectrum of the form  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(t) x_i x_k$ , as a function of  $t$ , assuming the existence of  $da_{ik}/dt$ , which, applied to (1), yields important results concerning the roots  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$  of  $D_n(x)$ . Thus, for ex.,  $\lambda_1$  and  $\lambda_n$  are resp. non-increasing and non-decreasing functions of  $b_1, \dots, b_{n-1}$ . We further get, considering a particular  $J$ , where all  $a_i$ , also all  $b_i$ , are equal, upper and lower bounds for  $\lambda_1, \lambda_n$ . The author next considers non-negative forms  $J$  [the zeros of  $D_n(x)$  are non-negative] and shows that here  $\lambda_n$  is a non-decreasing function of  $\{\alpha_k, \beta_k\}$ , and  $\lambda_1$  is a non-decreasing function of  $\{\alpha_k\}$  and a non-increasing function of  $\{\beta_k\}$ , where

$$\alpha_k^2 = D_k(0)/D_{k-1}(0), \quad \beta_k^2 = \frac{b_k^2 D_{k-1}(0)}{D_k(0)} \quad (k=1, 2, \dots, n-1; \alpha_k, \beta_k > 0); \quad \alpha_n = \frac{D_n(0)}{D_{n-1}(0)} \geq 0.$$

The author finally considers the relation of the zeros of  $D_n(x)$  to those of  $D_k(x)$  and  $D^{(k)}(x)$ , where

$$D^{(k)}(x) = \begin{vmatrix} a_k - x & -b_k & 0 & \dots & 0 \\ -b_k & a_{k+1} - x & -b_{k+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -b_{n-1} & a_n - x \end{vmatrix},$$

thus extending certain propositions of Stieltjes (*Recherches sur les fractions continues*, Oeuvres 2, 414—418). The foregoing results are given an interesting mechanical interpretation in terms of certain oscillating systems. [Note. A mechanical interpretation of Laguerre polynomials has been given by H. Bateman (*Lagrange's Compound Pendulum*), *Am. Math. Monthly* 38, 1—8 (1931); this *Zbl.* 1, 75; Ref.] *J. Shohat.*

**Morrey jr., Charles B.: A class of representations of manifolds. Pt. II.** *Amer. J. Math.* 56, 275—293 (1934).

The author defines a closed surface by subdividing the perimeter of the unit square  $Q$  into two sets of intervals and identifying the points of one set with the points of the other. A set of functions  $x^i(u, v)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) continuous on  $Q$  with this identification of points is a closed surface in  $N$ -space. If to logically distinct points  $(u, v)$  there correspond distinct points  $x^i$ , the surface is a simply covered closed surface. The scheme of closure permits the surfaces to be of infinite connectivity. Green's theorem is then established in the following considerable generality.  $R$  is a region in 3-space bounded by oriented simply covered closed surfaces  $S_i$ :  $x_i = x_i(u, v)$ ,  $y_i = y_i(u, v)$ ,  $z_i = z_i(u, v)$ ,  $(u, v)$  on  $Q$ ; these are of class  $L$  (cf. this *Zbl.* 8, 72) and the sum of the absolute values of the jacobians  $\partial(x_i, y_i)/\partial(u, v)$  is summable over  $Q$ .  $F(x, y, z)$  is measurable on a set  $D$  containing  $\bar{R}$ , is absolutely continuous in  $z$  for almost all  $(x, y)$ , and has a summable Dini derivative  $D_z(F)$ . Then

$$\iiint_R \frac{\partial F}{\partial z} dx dy dz = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \iint_Q F_{m,n}(x_i, y_i, z_i) \frac{\partial(x_i, y_i)}{\partial(u, v)} du dv,$$

where  $F_{m,n}$  has the value  $F$  when  $-m < F < n$ , the value  $-m$  when  $F \leq -m$ , and the value  $n$  when  $F \geq n$ . — An extension of Stokes' theorem of like generality is also established. *McShane* (Princeton).

## Reihen:

**Sunouchi, Gen-ichirô, and Naobumi Takagi: A generalization of the Carleman's inequality theorem.** *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 16, 164—166 (1934).

Mit einer, in einem Spezialfalle von Pólya verwendeten Methode wird der folgende Satz bewiesen: Für nichtnegative  $a_n$  und positive  $\lambda_n$  gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n} \left( e^{\frac{\lambda_n}{A_n}} - 1 \right) (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{A_n}} < e \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n,$$



wobei  $\lambda_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$  ist und die Konstante  $e$  durch keine kleinere ersetzt werden kann. Szegő (Königsberg, Pr.).

**Kac, M.:** A trigonometrical series. J. London Math. Soc. 9, 116—118 (1934).

The author constructs a simple example of a trigonometrical series convergent in an arbitrary interval of length  $< 2\pi$ , and divergent in the complementary interval.

A. Zygmund (Wilno).

**Ghermanesco, M.:** Sur un théorème de M. de La Vallée Poussin. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 106—111 (1934).

Consider a function  $f(x)$ , of period  $2\pi$ , such that  $|f^{(r)}(x)| < M_r$ . Let  $\Phi(t)$  be a trigonometric expression, even or odd, depending on one or several parameters  $p_k$

so chosen that  $\int_0^a t^r |\Phi(t)| dt$  exists ( $r$  — given positive integer) and such that

$$\frac{1}{\gamma} \int_{-a}^a f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \Phi(t) dt \equiv \Gamma_{\mu_r}(x, n) \quad \left(\gamma \equiv \int_{-a}^a \Phi(t) dt\right)$$

is a trigonometric sum of minimum order  $\mu_r$ . The author introduces the functions

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k f\left(x + \frac{2t}{2^k \cdot n}\right) \quad \left(\lambda = \left[\frac{r-1}{r}\right]\right)$$

$$F(t) = \varphi(t) + \varphi(-t) - 2\varphi(0) \quad (\Phi(t) \text{ even}), \quad \varphi(t) - \varphi(-t) \quad (\Phi(t) \text{ odd}).$$

By a proper choice of the constants  $a_k$  and following the general lines of reasoning employed by Vallée-Poussin for a similar purpose (Leçons sur l'approximation des fonctions ..., Paris, 1919), the author derives the following result:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda} a_k \Gamma_{\mu_k}(x, 2^k \cdot n) \right| < A \frac{M_r}{n^r},$$

where the constant  $A$  is independent of  $n$  and can be assigned in advance. The author points out that his sums  $\Gamma(x, n)$  contain, as special cases, the sums of Vallée-Poussin (l. c.) and Anghelutza (Thesis, Bukarest, 1922); also that the

above results holds for the sums  $G(x, n) = \frac{1}{g(p, q)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \frac{\sin^p t}{t^q} dt \quad (p > q)$ .

J. Shohat (Philadelphia).

**Birindelli, Carlo:** Su un metodo di sommazione nella teoria del prolungamento analitico. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 67, 109—120 (1934).

L'Auteur généralise une méthode de sommation, fournissant le prolongement analytique d'une série  $\sum a_n z^n$ , et due à M. Obrechhoff (Ann. Univ. Sofia, T. XXIV, 1927—1928).

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

**Broggi, U.:** Sul metodo generalizzato di sommazione di Eulero. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 273—279 (1934).

This note is concerned with a generalized Euler method of summability ( $E_u$ , of order  $u \geq 0$ ) and Borel's integral method of summability ( $B$ ). The generalized Euler

transform of order  $u$  of a series (1)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  is defined formally as

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_0 u^n + \binom{n}{1} a_1 u^{n-1} + \dots + a_n] / (1+u)^{n+1}; \quad (2)$$

(1) is said to be summable ( $E_u$ ) to  $s$  if (2) converges to  $s$ . The author's results include the following: the  $E_u$ -transform of a series summable ( $B$ ) is summable ( $B$ ) to the same sum; a series summable ( $E_u$ ) for any  $u$  is summable ( $B$ ) to the same sum; a series summable ( $E_u$ ) for  $u \geq 0$  is summable ( $E_v$ ) for  $v > u$  to the same sum. A necessary condition for summability ( $E_u$ ) is found; and permissibility is shown for the operations of adding two series each summable ( $E_u$ ), of multiplying such a series by a constant, and of adjoining a term to or omitting one from such a series.

C. R. Adams.

**Broggi, U.:** Su qualche trasformazione di serie. Boll. Un. Mat. Ital. **13**, 84—89 (1934).

The identity

$$u_n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} u^{n-h} T^h a_0, \text{ where } T^0 a_n = a_n \text{ and } T^{h+1} a_n = T^h a_{n+1} - u T^h a_n, (u \geq 0) \quad (1)$$

is here employed to obtain the “generalized Euler transform” ( $E_u$ , of order  $u$ ) of a series. Knopp’s proof that a convergent series is summable ( $E_1$ ) to the same sum is extended to all  $u > 0$ , and by means of (1) for  $u = 1$  a power series is transformed into a Newton series.

*C. R. Adams* (Providence).

**Broggi, Ugo:** Equazioni alle differenze e metodo euleriano generalizzato di sommazione. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **66**, 1269—1275 (1933).

The equation (1)  $f(x+p) + \sum_{i=1}^p a_i f(x+p-i) = \varphi(x)$  [ $a_i$  a (real or complex) constant,  $\varphi(x)$  known for  $x \geq 0$ ,  $f(x)$  to be determined] has a formal solution (2)

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi(x+n)$ . The author shows that if (2) has a “generalized Euler sum” ( $E_u$ ) of order  $u \geq 1$ , the sum will be a principal solution [Nörlund’s sense] of (1) only when (1)

has the form  $\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} f(x+p-i) = 2^p \varphi(x)$ ; the  $E_u$ -sum of the series is then Nörlund’s “Wechselsumme” of order  $p$  of  $\varphi(x)$ . It is thus possible to obtain the Wechselsumme of  $\varphi$  when  $\varphi$  satisfies less stringent conditions than those imposed by Nörlund.

*C. R. Adams* (Providence).

### Differentialgleichungen:

● **Ford, L. R.:** Differential equations. London: McGraw-Hill Publ. Co., Ltd. 1934, 263 S. 15/-.

**Sarantopoulos, Spyridion:** Sur l’existence des intégrales holomorphes des équations différentielles du premier ordre dans les cas singuliers. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1733—1735 (1934).

Soit 
$$x^2 \frac{dy}{dx} = ay + x\varphi(x) + x\sigma(x)y \quad (*)$$

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \dots; \sigma(x) = \delta_1 + \delta_2 x + \dots; \varphi(x) \exp \int_0^x \frac{\sigma(x) - \delta_1}{x} dx = A_0 + A_1 x + \dots$$

Alors pour que l’équation (\*) ait une intégrale  $g(x)$  holomorphe au voisinage du point  $x = 0$  et s’annulant avec  $x$ , il est nécessaire et suffisant que  $a$  soit un zéro de la fonction

$$\Phi(x) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{\nu} x^{\nu}}{(1-\delta_1) \dots (\nu-\delta_1)} \quad (\text{si } \nu \text{ n'est pas un nombre entier et positif),}$$

$$\text{ou de la fonction } \Phi_1(x) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{A_{\lambda+u} x^u}{u!} \quad (\text{si } \delta_1 = \lambda \text{ est un nombre entier et positif). Le}$$

résultat analogue est établi aussi pour l’équation

$$x^{\mu+1} \frac{dy}{dx} = ay + x\varphi(x) + \delta x^{\mu} y \quad (\mu > 1)$$

*Janczewski* (Leningrad).

**Lampariello, G.:** Su una classe notevole di equazioni differenziali del 2° ordine non lineari. I. Preliminari e riduzione al 1° ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., I. s. **19**, 284—290 (1934).

A function  $u = \Phi(t)$  which satisfies the conditions  $\Phi(0) = 1$ ,  $\Phi(\infty) = 0$  and the differential equation

$$t^{n+1} \frac{d^2 u}{dt^2} = u \frac{2n+1}{n+1}.$$



Decreases from 1 to 0 as  $t$  increases from 0 to  $\infty$  and  $\Phi'(+0)$  is negative. The differential equation has a particular solution

$$u = \Phi_0(t) = k_n t^{-\frac{n+2}{n}},$$

where

$$k_n = \left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( \frac{2}{n} + 1 \right) \right]^{1 + \frac{1}{n}}.$$

The solutions differing from this by a small quantity of the first order are found by solving the equation of the variations the differential equation is found to admit a continuous one parameter group of point transformations. Some transformations of the equation to other forms are considered. *H. Bateman* (Pasadena).

**Dingeldey, Friedrich:** Zu einem Satze von Hazzidakis über gewisse Systeme linearer Differentialgleichungen. *J. reine angew. Math.* **171**, 128—130 (1934).

Es seien  $x_i^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) partikuläre Lösungen des Systems  $\frac{dx_i^{(k)}}{dt} + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} = 0$ , in dem  $a_{ij}$  bekannte Funktionen von  $t$  bedeuten, und es sei die Determinante  $\|x_i^{(k)}\| \neq 0$ . Dann läßt sich jedes Lösungssystem  $z_i$  von  $\frac{dz_i}{dt} + \sum_{j=1}^n b_{ij} z_j = 0$  mit  $b_{ij} = -a_{ji} + \delta_{ij} \left( \sum_l a_{il} \right)$  darstellen als Linearkombination der  $(n-1)$ -reihigen Unterdeterminanten von  $\|x_i^{(k)}\|$ . Für diesen Satz von Hazzidakis [*J. reine angew. Math.* **90**, 80—82 (1880)] wird ein kurzer Beweis gegeben. *Rellich* (Göttingen).

**Yannopoulos, Const.:** Über das System der Differentialgleichungen:  $\frac{dy_i}{dx} = k_i \Phi_i$  ( $x_1, y_1, y_2, \dots, y_n$ ), ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). *Bull. Soc. Math. Grèce* **15**, Nr 1, 18—24 (1934). Behandelt das Problem, eine Lösung von

$$\frac{dy_i}{dx} = k_i \Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

zu finden, wobei  $y_i(0)$  und  $y_i(1)$  vorgeschriebene Werte annehmen sollen und die Zahlen  $k_i$  geeignet zu bestimmen sind. *Rellich* (Göttingen).

**Četajev, N.:** Un théorème sur l'instabilité. *C. R. Acad. Sci. URSS* **2**, 529—531 u. franz. Zusammenfassung 531 (1934) [Russisch].

Es wird der folgende Satz bewiesen (Verallgemeinerung des Liapunoffschen Satzes über Labilität): Sind die Störungsgleichungen so beschaffen, daß 1. ein Gebiet existiert, in dem für eine gewisse Funktion  $V$ , die eine infinitesimale obere Grenze (Terminologie von Liapunoff) zuläßt,  $V\dot{V} > 0$  ist ( $\dot{V}$  bedeutet die vollständige Ableitung von  $V$  durch die Bewegungsgleichungen ausgedrückt) und 2. falls in diesem Gebiet für gewisse Werte von  $x_s$  (Bewegungskordinaten), die beliebig klein gewählt werden können, ein anderes Gebiet angegeben werden kann, wo eine gewisse Funktion  $W > 0$  ist, auf deren Grenze ( $W = 0$ ) die vollständige Ableitung  $W$  ein bestimmtes Vorzeichen besitzt, so ist die Bewegung labil. — Mit Hilfe des bewiesenen Satzes wird das Theorem von Liapunoff (das reziproke des Lagrangeschen) über Labilität des Gleichgewichtszustandes verallgemeinert, es wird nämlich gezeigt, daß falls das positive Vorzeichen der Kraftfunktion

$$U = U_m + U_{m+1} + \dots$$

für genügend kleine  $|x_s|$  durch  $U_m$  ( $U_m$  Polynom  $m$ -ten Grades) bestimmt wird, so ist der Gleichgewichtszustand labil, falls  $U$  für gewisse Werte  $x_s$ , wie klein sie auch sein mögen, positive Werte annimmt. *A. Andronow, A. Witt* (Moskau).

**Srinivasiengar, C. N.:** A theorem concerning the  $p$ -discriminant. *Bull. Calcutta Math. Soc.* **25**, 115—120 (1934).

The author takes exception to the statement made by Painlevé in *Encycl. d. Math. Wiss.*, IIA, 4a, § 22, concerning a repeated particular integral of a differential equation  $\Phi(x, y, p) = 0$ , and draws attention to the distinction between the envelopes with contact of the first and second orders. The necessary conditions that  $\Phi(x, y, p) = 0$

ould admit of an envelope having contact of second order with every curve defined by the primitive are given.

*I. S. Sokolnikoff* (Madison).

**Pfeiffer, G.:** Sur les invariants intégraux d'ordre  $n - 1$ . Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 25, 257—266 (1933).

Diese Arbeit ist identisch mit der russischen Arbeit des Verf. referiert in dies. Zbl. 8, 314.

*Janczewski* (Leningrad).

**Levi-Civita, T.:** Sulle soluzioni stazionarie dei sistemi pfaffiani. — I. Generalità e teoremi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 261—267 (1934).

Let  $S$  be a pfaffian system of  $2n$  equations in  $2n + 1$  variables. Its integrals are the solutions of a single equation  $Xf = 0$ . Let  $\Sigma$  be a variety invariant under the symbol  $X$ . The paper shows that if  $f$  is an integral of  $S$  and if  $X, \Sigma$  are subjected to slight restriction, the variety defined by  $\partial f / \partial x_i = 0$  ( $i = 0, \dots, 2n$ ) and the variety  $\Sigma$  have, in general, a common subvariety which is integral for  $S$  and which has dimension at least one.

*J. M. Thomas* (Durham).

**Magnier, André:** Sur l'intégrale de Kronecker. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1567 (1934).

Soit  $X = f(x, y, z)$ ,  $Y = g(x, y, z)$ ,  $Z = h(x, y, z)$ ,  $f, g, h$  ayant des dérivées premières continues;  $\Delta(x, y, z) = \frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}$ . L'intégrale de Kronecker

$$I = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{X dY dZ + Y dZ dX + X dY dZ}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}}$$

est égale à la différence du nombre de solutions du système  $(E) f = g = h = 0$  intérieures à  $\Sigma$ , où  $\Delta > 0$ , et le nombre de solutions, où  $\Delta < 0$ . Résultats, énoncés par l'auteur:  $f, g, h$  ont des dérivées secondes continues; 1.  $x_0, y_0, z_0$  est une solution de  $(E)$  telle que  $\Delta(x_0, y_0, z_0) = 0$ ; le tableau

$$\begin{vmatrix} A'_x & f'_x & g'_x & h'_x \\ A'_y & f'_y & g'_y & h'_y \\ A'_z & f'_z & g'_z & h'_z \end{vmatrix}$$

a le rang 3 dans  $(x_0, y_0, z_0)$ ; alors  $I = 0$ ; 2. le système  $(E)$  a pour solution un continu  $C$  intérieur à  $\Sigma$ ; en tout point de  $C$  le tableau des dérivées partielles de  $f, g, h$  est de rang 2; l'ensemble des points de  $C$ , où le tableau

$$\begin{vmatrix} A'_x & A'_y & A'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix}$$

ou l'un des deux analogues sont de rang 1, ne contient qu'un nombre fini de points; alors  $I = 0$ .

*W. Stepanoff* (Moskau).

**Rosenblatt, Alfred:** Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples. Bull. Soc. Math. Grèce 15, Nr 1, 7—16 (1934).

Ausführlicher Beweis der in C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1278—1280 (1933) angekündigten Ergebnisse (dies. Zbl. 8, 15).

*G. Cimmino* (Napoli).

**Janet, Maurice:** Systèmes de deux équations aux dérivées partielles à une fonction inconnue de  $n$  variables indépendantes. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1565—1567 (1934).

Es sei

$$A(u) = \sum a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

und

$$B(u) = \sum b_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} \frac{\partial^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n} u}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$$

mit  $0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq p$  und  $0 \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \leq q$  und es bestehe eine identische Beziehung der Form  $L[A(u)] + M[B(u)] = 0$ , wo  $L$  und  $M$  lineare Differentialausdrücke von kleinerer Ordnung als  $q$  bzw.  $p$  bedeuten. Dann ist unter gewissen Voraussetzungen für die Kompatibilität von  $A(u) = f$  und  $B(u) = g$



notwendig und hinreichend  $L(f) + M(g) = 0$ . Die allgemeine Lösung von  $L[A(u)] = 0$  erhält man, in dem man die allgemeine Lösung von  $A(u) = 0$  zu der von  $B(u) = 0$  addiert. Rellich (Göttingen).

**Burgatti, Pietro:** Sulla unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione in  $(S_n)$  delle onde smorzate. Atti Accad. Sci. Torino **69**, 192—196 (1934).

L'Autore, generalizzando opportunamente un artificio dovuto a S. Zaremba [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., V. s. **24**, 904—908 (1915)], dimostra l'unicità della soluzione del problema di Cauchy relativo all'equazione delle onde smorzate

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + k^2 U = 0.$$

Egli fa uso, con la perspicuità che gli è propria, dei metodi dell'analisi vettoriale.

A. Colucci (Napoli).

**Caccioppoli, R.:** Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con  $n$  variabili indipendenti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 83—89 (1934).

1. Diese Note kündigt Sätze über Abschätzung und Existenz der Lösungen linearer und nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen 2. Ordnung an. Die Überlegungen betreffend linearer Differentialgleichungen stehen mit gewissen Ergebnissen des Referenten, nämlich mit zwei dem Verf. seinerzeit vom Ref. bekannt gegebenen C. R. Acad. Sci., Paris-Noten [J. Schauder, C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 1365 (1932) und **196**, 89 (1933)] und einer späteren ausführlichen Darstellung [Math. Z. **38**, 257 (1934), im folgenden mit C. R. Acad. Sci., Paris I, II, Math. Z. zitiert] im engen Zusammenhange. Die diesbezüglichen Sätze, meistens sogar die bei einzelnen Schritten der skizzierten Beweise benutzten Methoden befinden sich bereits in C. R. Acad. Sci., Paris I, II, Math. Z., z. B. die Benutzung der Hilfsmittel der Potentialtheorie, insbesondere der Kellogschen Abschätzungen am Rande, die Art der Behandlung der Existenzprobleme, die Weise, in welcher die Alternative bei allgemeinen linearen Gleichungen gelöst wird, die Abschätzung der höheren Ableitungen usw. Das neu hinzugekommene Moment besteht darin, daß Verf. — bei Abschätzung der zweiten Ableitungen — statt der  $(\alpha + \varepsilon)$ -Hölderstetigkeit der Koeffizienten der zweiten Ableitungen nur ihre  $\alpha$ -Hölderstetigkeit benutzt, wofür einige Züge eines indirekten Verfahrens angedeutet werden (beim Ref. direkt). Dies gelingt, wegen der in jedem Gebiete  $G$  vom Durchmesser  $\delta$  gültigen Abschätzung

$$\text{Max} |D_2 u| \leq \frac{\text{Max} |u|}{\delta^2} + \delta^\alpha. \quad (\alpha \text{ Hölderkonstante von } D_2 u) \quad (1)$$

[Es sei bemerkt, daß (1) in Math. Z. Formeln (30) (31) usw. eingeführt ohne weitere Zusatzbetrachtungen ebenfalls diese Ergänzung ergibt.] — 2. Aus solchen Methoden ergeben sich in natürlicher Weise numerische Schranken für die bei Abschätzung vorkommenden Konstanten, wofür auch Verf. einige Fälle angibt. Eine dieser Varianten ist nach Verf. besonders wichtig. — 3. Vollkommen neu (für  $n > 2$ ) ist der folgende im letzten Paragraph der vorliegenden Note angekündigte interessante Satz: Für die nichtlineare elliptische Differentialgleichung

$$\sum_{ik} A_{ik} p_{ik} + \sum_{ik} a_{ik} p_i p_k + \sum b_i p_i = f \quad (2)$$

( $f$  und die Koeffizienten sind nur Funktionen von  $x_1 \dots x_n$  und hölderstetig) ist das Dirichletsche Problem unbeschränkt lösbar. Da sich dabei der Verf. des S. Bernsteinischen Fortsetzungsprinzips bedient, welches heutzutage in der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen allgemein benutzt wird, liegt die wirkliche Schwierigkeit in der „a priori“ Abschätzung der Normen  $\|u\|$  der Lösungen. Hierfür wäre ein ausführlicher verifizierender Beweis wünschenswert. (Vgl. dies. Zbl. **6**, 57, 116 u. **8**, 255 [Schauder].)

Schauder (Lwów).

**Rosenblatt, Alfred:** Sur les équations  $m$ -harmoniques non linéaires à deux variables indépendantes. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 633—635 (1934).

A study is made of the equation  $\Delta_{2m} u = F$  where  $F$  is a function of  $u$  and its derivatives with respect to  $x$  and  $y$  up to order  $2m - 2$  and  $\Delta_{2m}$  means the Laplacian operator repeated  $m$  times. The function  $F$  also depends on  $x$  and  $y$  and is supposed to satisfy a Hölder condition in these variables as well as a generalised Lipschitz condition in these and the other arguments. The inequalities that are adopted permit the use of Picard's method of successive approximations and Lavricella's Green's function for  $\Delta_{2m} v = 0$  bounds are found for the derivatives of this Green's function and for the derivatives of an integral containing it. An inequality which is a generalisation of the classical inequality of Picard furnishes a sufficient condition for the absolute and uniform convergence of the successive approximations and their derivatives up to order  $m - 1$ .

H. Bateman (Pasadena).

**Rosenblatt, Alfred:** Sur l'équation biharmonique non linéaire à deux variables indépendantes dans un domaine général. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1110—1112 (1934).

The equation of the previous paper is replaced by an integro-differential equation by first using Picard's method of successive approximations and then integrating by parts. In the present case  $m = 2$  and the kernel of the integral equation has a logarithmic singularity. The homogeneous equation has no solution and so the series of Fredholm and Hilbert furnishes a solution in a form which can again be integrated by parts and combined with inequalities so as to furnish a sufficient condition for the absolute and uniform convergence of Picard's sequence towards the desired solution.

H. Bateman (Pasadena).

**Kozakiewicz, Wacław:** Un théorème sur les opérateurs et son application à la théorie des laplaciens généralisés. C. R. Soc. Sci. Varsovie 26, 18—24 (1933).

Die von Blaschke, Privaloff und Zaremba eingeführten Operatoren können als Verallgemeinerungen des klassischen Laplaceschen Operators  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  angesehen werden. Es wird nun gezeigt, daß die Gleichheit dieser Operatoren aus Sätzen der Funktionalanalysis folgt, die der Verf. in dieser Note aufstellt. Die Eigenschaft einer Funktion  $F(x, y)$  subharmonisch zu sein, läßt auch ein „funktionales“ Kriterium zu.

Schauder (Lwów).

**Lowan, Arnold N.:** Heat conduction in a solid in contact with a well-stirred liquid. Philos. Mag., VII. s. 17, 849—854 (1934).

The temperature  $T(x, t)$  is expressed as a sum  $\Phi(x) + u(x, t)$  where  $\Phi(x)$  is temporarily undetermined and  $u(x, t)$  is associated by the Laplace transformation with a function  $y(x, \lambda)$  which satisfies a differential equation involving the parameter  $\lambda$  which also enters into one of the boundary conditions. The characteristic functions of this “loaded” boundary problem are not orthogonal but Kneser's “loaded” normalizing condition can be used and the Green's function expressed by a bilinear relation. An expansion for  $T(x, t)$  is then written down and  $\Phi(x)$  is determined. Bateman.

**Fox, E. N.:** Temperature rise in a heat-evolving medium. Philos. Trans. Roy. Soc. London A 232, 431—461 (1934).

Let  $\varepsilon(t)$  be the rate of heat-evolution per unit volume due to chemical action such as that which takes place in rapid hardening cement. Then the temperature  $T$  satisfies the equation

$$\varepsilon(t) = \sigma \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \nabla^2 T,$$

where  $\kappa$  is the conductivity of the heat-evolving medium and  $\sigma$  is its heat capacity per unit volume. The greatest possible rise of temperature,  $T_m$ , will occur when there is no loss of heat from the boundaries in which case

$$T_m = \frac{1}{\sigma} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau,$$



and we have the fundamental equation

$$h^2 V^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{dT_M}{dt},$$

where  $h^2 = \kappa/\sigma$  is the diffusivity of the heat-evolving medium. The results of the paper are expressed in terms of  $T_m$  because this quantity can be recorded directly. If the heat-evolving medium is bounded by an ordinary medium of temperature  $T_1$ , diffusivity  $h_1^2$  and conductivity  $\kappa_1$  we have the conduction equation  $\partial T_1 / \partial t = h_1^2 V^2 T_1$

for the bounding medium and the boundary conditions  $T = T_1$ ,  $\kappa \frac{\partial T}{\partial n} = \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n}$

The initial conditions for  $t = 0$  are  $T = 0$ ,  $T_1 = D$  where  $D$  is constant. — A calculation is made first of the temperature rise in a circular cylinder with Newton's boundary

law  $\kappa \frac{\partial T}{\partial n} = E T_A(t) - E T$  where  $T_A(t)$  is the external temperature a known function

of  $t$ . Use is made of Heaviside's "unit" function and Bromwich's rule. The same problem is solved also for a plane slab and a sphere. The rise of temperature in a circular cylinder surrounded by another medium is then studied. The corresponding problem for a sphere is also treated and a slab is considered when the boundary conditions at the 2 faces are different.

H. Bateman (Pasadena).

### Spezielle Funktionen:

**Sutton, W. G. L.:** The asymptotic expansion of a function whose operational equivalent is known. J. London Math. Soc. 9, 131—137 (1934).

In der Heavisideschen Operatorenrechnung versteht man unter dem operationellen Äquivalent der Funktion  $f(t)$  ( $t$  reell  $> 0$ ) eine Funktion  $\varphi(p)$  bestimmt durch die Integralgleichung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tz} \varphi(z) \frac{dz}{z}, \quad (c > 0)$$

wo die Integrationsgerade  $x = c$  so gewählt ist, daß  $\varphi(z)$  analytisch ist für  $x \geq c$ . Der Verf. beweist, daß unter den folgenden Bedingungen eine asymptotische Entwicklung von  $f(t)$  für große reelle positive Werte von  $t$  besteht. Es wird gesetzt

$\frac{\varphi(z)}{z} = \psi(z)$ . — 1. Wenn  $\psi(z)$  analytisch ist für  $x \geq a - \delta$  ( $\delta > 0$ ) ausgenommen

in den  $k$  Punkten  $z_1, \dots, z_k$  auf  $x = a$ . — 2. Wenn in der Nähe jedes Punktes  $z_p$

$$(z - z_p) \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{np} (z - z_p)^n + (z - z_p)^{\beta_p} \sum_{n=0}^{\infty} b_{np} (z - z_p)^n, \quad (0 < \beta_p < 1)$$

wo beide Reihen für  $|z - z_p| < l$ , ( $l > 0$ ) konvergieren. — 3. Wenn  $\psi(z) \rightarrow 0$  für  $y \rightarrow \pm \infty$ , gleichmäßig in  $x$  für  $a - \delta \leq x \leq c$  ( $c > a$ ), und in solcher Weise, daß

$\int |\psi(z)| dy$  für unendlich wachsende Werte von  $y$  konvergiert, so gilt für  $t >$

$$f(t) \sim \sum_{p=1}^k e^{z_p t} \left( a_{0p} + \frac{\sin \pi \beta_p}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_{np} \Gamma(\beta_p + n) t^{-\beta_p - n} \right).$$

Der Verf. erweitert dieses Ergebnis unter gewissen Beschränkungen auf asymptotische Entwicklungen für nichtreelles  $t$ , insbesondere für  $t = r e^{i\alpha}$ ,  $\alpha$  konstant,  $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$

Anwendung auf das Integral

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(-\infty, -i, +i, -\infty)} e^{tz} \{ (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - z \}^n (z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dz$$

liefert die bekannte asymptotische Entwicklung. S. C. van Veen (Dordrecht).

**Kuttner, B.:** Divisor functions: Fourier integral theorems. Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 161—208 (1934).

In Verallgemeinerung der Hankelschen Funktionen führte S. W. P. Steen sog. Teilerfunktionen  $Y(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \mu; z)$  ein [Proc. London Math. Soc. 31 (1930), 32 (1931)]

dies. Zbl. 2, 138], in welchen  $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu; \mu$  Parameter sind. — Verf. bildet endliche lineare Aggregate von Teilerfunktionen für geeignete Parameterwerte und gewinnt auf diese Weise Paare von Funktionen  $K(z), H(z)$ , welche für willkürliche Funktionen  $f(x)$  die Inversionsformel

$$\int_0^\infty K(ux) du \int_0^\infty f(y) H(uy) dy = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

zulassen [Theorem II]. Die Gültigkeitsbedingungen für  $f(x)$  sind analog wie im Falle des wiederholten Fourierschen Integrals und des Hankelschen Integrals, welche als Spezialfälle enthalten sind. — In Theorem III werden Kerne  $G(y)$  konstruiert, welche für allgemeine  $\varphi(t)$  und passende  $\delta$  die Relation

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(t) dt \int_0^\lambda G(t^2 y^2) \left(1 - \frac{y}{\lambda}\right)^\delta dy = \varphi(+0)$$

zulassen. In Theorem IV werden etwas andere Kerne  $G(y)$  angegeben, welche es erfordern, daß das innere Integral durch  $\log \lambda$  dividiert wird. In Theorem V und VI werden Theorem III und IV für den Fall verallgemeinert, daß der Grenzwert  $\varphi(+0)$  nur in einem verallgemeinerten Sinne existiert. — Zur Kennzeichnung der auftretenden Kerne sei angeführt, daß z. B.  $K(z)$  die Form

$$-\frac{1}{C} \Gamma(\alpha_1 - s) \dots \Gamma(\alpha_\nu - s) \cos \frac{1}{2} \pi (s - \alpha_1) \dots \cos \frac{1}{2} \pi (s - \alpha_r) \sin \frac{1}{2} \pi (s - \alpha_{r+1}) \dots \sin \frac{1}{2} \pi (s - \alpha_\nu) ds$$

hat,  $\sum_{n=1}^\nu \alpha_n = 0$ , wobei die Schleife  $C$  auf dem Wege von  $+\infty$  nach  $+\infty$  die Pole des Integranden im positiven Sinne umkreist.

Bochner (Princeton).

**Slouguinoff, S. P.:** *Certaines propriétés des fonctions bêta et gamma.* Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 8, 161—183 (1933).

The author gives a lucid exposition of the elementary properties and applications of Euler's functions  $B$  and  $\Gamma$ . I. Formulae of Euler and Gauss, Stirling's Formula with the rough asymptotic factor  $1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ , Raabe's integral (derived in an interesting manner by the method of Hadamard), integral representation of  $\log \Gamma(a)$ , Euler's Constant, asymptotic expression of  $\log \Gamma(a + \frac{1}{2})$  and an improved asymptotic expression for  $n!$  II. Applications: Dirichlet's integral, determination of certain volumes, centers of gravity and moments of inertia, hypergeometric series, the function  $\zeta$ . (There is an annoyingly confusing use of the letters  $F$  and  $\Gamma$ ). J. Shohat.

**Gheorghiu, Gh. Th.:** *Sur les polynômes associés aux fonctions métasphériques.* Bull. Sci. math., II. s. 58, 139—141 (1934).

In der Nielsenschen Theorie der metasphärischen Funktionen treten die Polynome

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^s \Gamma(\alpha + n - s)}{s! \Gamma(\beta + n - 2s)} (2x)^{n-2s}$$

auf, für welche Verf. einige formale Sätze (Rekursion, Differentialgleichung, Differentialrekursion, erzeugende Funktion) mitteilt. Es wird auch der Zusammenhang mit den aus der Theorie der Besselschen Funktionen bekannten Gegenbauerschen Polynomen (Watson, Theory of Bessel functions, S. 283) erörtert. Szegő (Königsberg).

**Mitra, S. C.:** *On a certain polynomial analogous to Lommel's polynomial.* J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 4—7 (1934).

The author continues a previous paper (cf. Zbl. 4, 6) by studying properties of the parabolic cylinder function of imaginary argument,  $D_n(ix)$ . For the equation,  $\frac{d^2 y}{dx^2} + (m + n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} x^2) y = 0$ , which has the particular solution  $D_{-(m+n+1)}(\pm ix)$  the author assumes a solution of the form:  $y = D_{-n-1}(ix) A(x) + i D_{-n-2}(-ix) B(x)$ .



The functions  $A(x)$  and  $B(x)$  are shown to satisfy linear differential equations of fourth order and their values are explicitly determined. From these results the author makes an explicit determination of the functions,

$$D_{-(m+n+1)}(ix) D_{-(n+1)}(-ix) \pm D_{-(m+n+1)}(-ix) D_{-(n+1)}(ix),$$

where  $m$  is an integer and  $n$  is any positive value. *H. T. Davis* (Bloomington).

**Belardinelli, Giuseppe: Rappresentazione delle funzioni algebriche mediante funzioni ipergeometriche.** *Ist. Lombardo, Rend.*, II. s. 67, 129—138 (1934).

Der Verf. setzt seine Untersuchungen über die Lösungen algebraischer Gleichungen durch verallgemeinerte hypergeometrische Reihen fort (vgl. dies. Zbl. 6, 106, dort weitere Verweise). „Er beschäftigt sich in der vorliegenden Arbeit mit der Auflösung algebraischer Gleichungen in  $y$ , deren Koeffizienten Polynome in  $x$  sind, und untersucht die analytische Natur dieser Reihen, die die verschiedenen Zweige der algebraischen Funktion  $y(x)$  darstellen.“ *v. Koppenfels* (Hannover).

**Conforto, F.: Sulla costruzione di funzioni automorfe mediante prodotti infinite.** *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 19, 290—296 (1934).

Sind  $P(z)$  und  $Q(z)$  irgend zwei zu einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$  gehörige Poincarésche Thetafunktionen von der Dimension  $-2m$  bzw.  $-(2m+1)$ , so stellt der Ausdruck

$$\int \frac{P(z)}{Q(z)} dz \quad (1)$$

ein Abelsches Integral des zu  $\Gamma$  gehörigen algebraischen Gebildes dar. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man jene Thetafunktionen zu wählen hat, damit (1) ein Elementarintegral dritter Gattung wird. Hieraus ergibt sich dann zunächst für die Kleinsche Primform, dann aber für eine beliebige automorphe Funktion der Gruppe eine Produktdarstellung, welche in etwas anderer Form schon früher z. B. bei Stahl (Math. Ann. 33) zu finden ist. *Myrberg* (Helsinki).

**Conforto, F.: Sulla costruzione di funzioni automorfe mediante prodotti infinite.** *II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 19, 383—385 (1934).

Auf Grund der Entwicklungen des ersten Teiles wird hier eine Produktdarstellung für die Kleinsche Primform und damit für die automorphen Funktionen der gegebenen Gruppe hergeleitet. *Myrberg* (Helsinki).

### Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

**Badesco, Radu: Sur l'équation de Fredholm dans le domaine complexe.** *Bull. Sect. Sci. Acad. Roum.* 16, 108—110 (1933).

The paper announces more precise conditions for the existence of an analytic solution of the linear integral equation  $\varphi(z) - \lambda \int_K(z, s) \varphi(s) ds = \psi(z)$  in the complex field, and the character of the region in which it is possible to extend  $\varphi(z)$ . See this Zbl. 3, 58 and 398. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

**Friedrichs, Kurt: Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendungen auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren.** *II. Math. Ann.* 109, 685—713 (1934).

The author applies the general theory developed in an earlier paper (Math. Ann. 109, 465—487; this Zbl. 8, 392) to the study of differential operators

$$-V^2 + v(x_1, \dots, x_n), \quad n = 1, 2, 3,$$

under typical boundary and regularity conditions, including those appropriate to the Schrödinger formulation of the problem of motion in a central field (hydrogen atom, etc.). The procedure is this: first, a suitable domain of functions is assigned to the formal operator so that it may be treated as a positive definite symmetric operator in a real Hilbert space; second, this operator is extended abstractly to a similar operator which is closed in the sense defined in the author's first paper; third, the extended operator is shown, by calculations which justify the application of a simple lemma from

the first paper, to be self-adjoint and hence to possess a spectral resolution. Criteria for the existence of point-spectra are given in the various cases. The details of the method are controlled so as to reveal essential information concerning the differentiability and other regularity properties of the characteristic functions. The author proposes to treat the case  $n = 1$  more fully in another paper.

*M. H. Stone.*

**Leray, Jean, et Jules Schauder:** *Topologie et équations fonctionnelles.* Ann. École norm., III. s. **51**, 45—78 (1934).

Eine vollständige Darstellung der Untersuchungen, welche im Zentralblatt nach eine C. R.-Note schon referiert wurden (s. dies. Zbl. **7**, 165). *A. Kolmogoroff.*

**Lévy, Paul:** *Complément à l'étude des espaces V e W.* C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1661—1662 (1934).

La Note a pour but de préciser et rectifier quelques résultats contenues dans deux Notes antérieures de l'auteur [C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 786—788 et 1203—1205 (1934); ce Zbl. **8**, 367 et **9**, 27]. La formule fondamentale de la seconde Note doit être remplacée suivant l'auteur par la formule suivante:

$$\log \Phi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{iz u} - 1 - iz \frac{u}{1+u^2} \right] d_u N(u, t).$$

*A. Kolmogoroff (Moskau).*

### Differenzengleichungen:

**Flath, Heinrich:** *Zum Grenzübergang von der Differenzenrechnung zur Differentialrechnung.* Darmstadt: Diss. 1933. 57 S.

An elementary discussion consisting of two parts. Part 1: Differences. Starting with the difference-relation

$$\frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} \equiv \Delta f(x) = \varphi(x), \quad (1)$$

a series of examples is built up ("finite Analoga" — author), where (1) has exactly the same form as corresponding formulae in the Differential Calculus; moreover, the latter (functions and derivatives) are limiting cases of (1) for  $\omega \rightarrow 0$ . Examples.

1. Factorial:  $\Delta \{x^n\} = n \{x^{n-1}\}; \quad (\{x^n\} \equiv x(x-\omega) \dots (x-\overline{n-1}\omega)); \quad (2)$

(2) is shown to hold for negative  $n$ , also for any real exponent (by means of the function  $\Gamma$ ). 2. Exponential function:

$$\Delta \{e^x\} = \{e^x\}, \quad \left( \{e^x\} \equiv (1+\omega)^{\frac{x}{\omega}} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\{x^v\}}{v!} \right) \quad (3)$$

and trigonometric and hyperbolic functions:  $\{\cos x\}, \dots, \{\cosh x\}, \dots$  with  $\{\cos x\} \equiv \frac{\{e^{ix}\} + \{e^{-ix}\}}{2}$ , etc. — 3. Logarithm:  $\{\ln x\} \equiv \frac{x^\omega - 1}{\omega}$ . Numerous graphs

serve to illustrate the above examples. Part 2. Sommatation. Here the author deals with "sommatation" of rational functions, again as "finite Analogon" ( $\omega \rightarrow 0$ )

to corresponding formulae in the Infinitesimal Calculus. Examples. 1.  $\Delta f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $\frac{1}{1-x^2}$ , the first of which has the solution  $f(x) \equiv f(x|\omega) = \{\arctan x\}$  ( $Rx > 0; \omega \neq 0$ ).

2.  $\Delta f(x) = \frac{M+iN}{(x-h-ik)^m} + \frac{M-iN}{(x-h+ik)^m}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). The solutions are given in integral form, also in form of infinite series, by making extensive use of Nörlund's theory of sommatation.

*J. Shohat (Philadelphia).*

**Mambriani, A.:** *Sulla risoluzione delle equazioni ricorrenti, lineari, d'ordine finito e a coefficienti costanti.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 16—21 (1934).

The author considers the general solution  $C_v$  of the linear difference equation

$$a_0 c_v + a_1 c_{v-1} + \dots + a_n c_{v-n} = b_v \quad (a_0 \neq 0) \quad (1)$$

of finite order  $n$ , with constant coefficients (homogeneous or not). Making use of some



of the results of his „Algebra del successioni“ [Ann. di Mat., s. IV, 8, 103—159 (1930); 9, 25—56 (1931); this. Zbl. 1, 331], he first obtains symbolic formulae for  $c_v$ : a) in terms of  $a_0, a_1, \dots, a_n$  and of the sequence  $b_n, b_{n+1}, \dots$ , b) in terms of the roots of the characteristic equation of (1). These symbolic formulae are then developed and yield explicit expressions a) and b) for  $c_v$ . Letting  $n = 2$ , we thus obtain at once the first expression for  $c_v$  as given by I. J. Schwatt and even a more general form of his second expression for  $c_v$  (this Zbl. 7, 414). (The author remarks at the outset that Schwatt's first expression for  $c_v$  is contained, as a special case, in a previously published result of his own [Sulla risoluzione delle equazioni differenziali, a coefficienti constanti, Boll. Un. Mat. Ital. 9, 274—278 (1930)].) J. Shohat (Philadelphia).

**Košliakov, N. S.:** Remarks on the paper of I. J. Schwatt „The sum of like powers of a series of numbers, forming an arithmetical progression and the Bernoulli numbers“. Rec. math. Moscou 40, 528 (1933) [Russisch].

The author shows that the expression derived by I. J. Schwatt [ibid. 39, 134 to 140 (1932); this Zbl. 7, 70 (1933)] for the sum  $\sum_{k=0}^n (a + kh)^p$  follows directly from the classical Euler-Maclaurin Summation Formula. He further remarks that Schwatt's expression for the sum  $\sum_{k=0}^n (-1)^k (a + kh)^p$  (ibid.) follows from Boole's Summation Formula. J. Shohat (Philadelphia).

### Funktionentheorie:

**Frazer, H.:** On regular functions. J. London Math. Soc. 9, 90—94 (1934).

Beweis der folgenden interessanten Ungleichung, die für  $\theta = 0$  durch Fejér und F. Riesz [Math. Z. 11, 305—314 (1921)], für  $\theta = \frac{\pi}{2}$  durch Verf. selbst [Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 532—546 (1934); dies. Zbl. 8, 213] bekannt war:

$$\int_{D_1 + D_2} |f(z)|^2 |dz| \leq \left( \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)^{-1} \int_{\Gamma} |f(z)|^2 |dz|.$$

Hier ist  $\lambda > 0$ ,  $f(z)$  ist regulär im abgeschlossenen Einheitskreise  $\Gamma$ ,  $D_1$  und  $D_2$  sind Durchmesser desselben, welche den spitzen Winkel  $\theta$  miteinander einschließen. Es genügt natürlich der Fall  $\lambda = 2$ , d. h. die folgende Verallgemeinerung der Hilbertschen Ungleichung zu beweisen:

$$\sum_{\substack{r, s=0, 1, 2, \dots \\ r \equiv s \pmod{2}}} a_r a_s \cos \frac{1}{2}(r-s)\theta \frac{\theta}{r+s+1} \leq \left( \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)^{-1} \frac{\pi}{2} \sum_{r=0}^{\infty} a_r^2,$$

was mittels des Cauchyschen Satzes und der Schwarzschen Ungleichung geschieht.

Szegő (Königsberg, Pr.).

**Frazer, H.:** Note on regular functions. J. London Math. Soc. 9, 114—116 (1934).

Gabriel hat bewiesen [Proc. London Math. Soc., II. s. 28, 121—127 (1928)], daß unter  $\Gamma$  den Einheitskreis, unter  $C$  ein eingeschriebenes konvexes Polygon verstanden, für eine im abgeschlossenen Inneren von  $\Gamma$  reguläre Funktion  $f(z)$

$$\int_C |f(z)|^2 |dz| \leq 2 \int_{\Gamma} |f(z)|^2 |dz|$$

gilt,  $\lambda > 0$ . Verf. beweist auf direktem Wege eine Verschärfung dieses Resultates für den Fall eines regelmäßigen Polygons  $C$ ; bezeichnet  $n$  die Anzahl der Seiten desselben, so tritt an Stelle des obigen Faktors 2

$$A(n) = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 1, \quad \text{wenn } n \rightarrow \infty.$$

Szegő (Königsberg, Pr.).

**Levin, Viktor:** Über die Koeffizientensummen einiger Klassen von Potenzreihen. Math. Z. 38, 565—590 (1934).

Für eine bestimmte Klasse  $\mathfrak{R}$  der im Einheitskreise  $|x| < 1$  konvergenten Potenz-

reihen  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  sei das Maximum von  $|a_0 + a_1 + \dots + a_n|$  mit  $\sigma_n = \sigma_n(\mathfrak{K})$  bezeichnet. Verf. unternimmt, in verschiedenen besonderen Fällen diese Größe nach oben und nach unten abzuschätzen. Aus den reichhaltigen Ergebnissen der Arbeit seien die folgenden genannt. — I. Es sei  $(E)$  die Klasse der Potenzreihen mit  $|f(x)| \leq 1$  für  $|x| < 1$ . Für die Klasse  $\mathfrak{K}$  der zu  $(E)$  gehörigen Polynome eines festen Grades  $k$  ist

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \text{wenn } k = 2,$$

$$\sigma_n \leq \text{Min}(G_n, 1 + G_{k-n-1}), \quad \text{wenn } k \geq 3 \quad \text{und} \quad 1 \leq n \leq k-1,$$

wobei  $G_n$  die durch Landau bekannte Größe  $G_n = \sigma_n(E)$  bezeichnet. — II. Es sei  $p \geq 1$  und  $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots$  seien vorgegebene positive Zahlen. Für die Funktionen von  $(E)$ , welche die Bedingung

$$\sum_{v=p}^{\infty} \alpha_v |a_v|^2 \leq 1$$

erfüllen, wird  $\sigma_n \leq u_n$  bewiesen, wobei  $u_n$  die untere Grenze von

$$\sum_{v=0}^n |\lambda_v|^2 + \left\{ \sum_{\mu=0}^{n-p} \alpha_{n-\mu}^{-1} \left| 1 - \sum_{v=0}^{\mu} \lambda_v \lambda_{\mu-v} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

bezeichnet, wenn die  $\lambda_v$  alle komplexen Werte mit den Nebenbedingungen

$$\sum_{v=0}^{\mu} \lambda_v \lambda_{\mu-v} = 1, \quad \mu = n-p+1, \dots, n$$

durchlaufen. — III. In dem Falle  $p = 1$ ,  $\alpha_v = v$  haben Fejér [Acta math. **49**, 183 bis 190 (1926)] bzw. Ref. [Math. Ann. **100**, 204 (1928)] die Abschätzungen:

$$\text{Obere Grenze von } \sigma_n \leq 1,7071 \dots \quad \text{bzw.} \quad 1,6160 \dots$$

erhalten. Verf. gewinnt für die gleiche Größe die Schranke

$$\text{Untere Grenze von } \int_0^1 \varphi^2(x) dx + \left\{ \int_0^1 (1-x)^{-1} \left[ 1 - \int_0^x \varphi(y) \varphi(x-y) dy \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

wobei  $\varphi(x)$  alle in  $0 \leq x \leq 1$  reellen und stetig differenzierbaren Funktionen durchläuft, welche der Bedingung

$$\int_0^1 \varphi(x) \varphi(1-x) dx = 1$$

genügen. Dies führt sodann auf die Schranke 1,6049 ... Es werden auch untere Abschätzungen von  $\sigma_n$  gewonnen. — IV. Für die Klasse der Funktionen  $f(x)$ , die samt  $f'(x)$  zu  $(E)$  gehören, erhält man

$$\sigma_1 \leq 1,19 \dots, \quad \sigma_2 < 1,338;$$

$$\sigma_n \leq 1 + \frac{G_{n-1}}{n+1}, \quad n \geq 3.$$

Es werden auch untere Abschätzungen gegeben, z. B.  $\sigma_1 \geq 1,113 \dots$ , sowie allgemeinere Sätze, in denen  $f^{(p)}(x)$  an die Stelle von  $f'(x)$  tritt. — V. Für die Klasse der in  $|x| < 1$  regulär-schlichten und „ $k$ -fach symmetrischen“ Funktionen gilt

$$\overline{\lim} \frac{\sigma_n}{n} \leq 1,24 \dots, \quad \text{wenn } k = 2,$$

$$\overline{\lim} \frac{\sigma_n}{n^{\frac{2}{3}}} \leq 1,68 \dots, \quad \text{wenn } k = 3.$$

Szegő (Königsberg, Pr.).

**Joh, Kenzo, und Shin-ichi Takahashi: Ein Beweis für Szegö'sche Vermutung über schlechte Potenzreihen.** Proc. Imp. Acad. Jap. **10**, 137—139 (1934).

Verfehlter Beweisversuch für die Vermutung, daß bei einer „ $k$ -fach symmetrischen“ im Einheitskreise  $|x| < 1$  regulär-schlichten Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n; \quad a_1 = 1, \quad a_n = 0 \quad \text{für } n \not\equiv 1 \pmod{k}$$



die Koeffizientenabschätzung  $|a_n| < A n^{\frac{2}{k}-1}$  gilt ( $A$  eine Konstante). Das Versehen liegt in der zum Schluß vorgenommenen partiellen Summierung, wo aus  $C_n = O(n^\alpha)$

$$\alpha = \frac{4}{k+1},$$

$$\sum_{m=1}^n C_m \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) = O \sum_{m=1}^n m^{\alpha-2} = O(m^{\alpha-1})$$

gefolgert wird, was für  $\alpha \leq 1$  falsch ist.

Szegö (Königsberg, Pr.).

**Abramseco, N.:** Sur le cercle d'univalence d'une fonction holomorphe  $f(x)$  et sur la plus petite distance entre deux zéros d'une équation  $f(x) = A$ . Rend. Circ. mat. Palermo 58, 49—54 (1934).

Der Betrag  $r$  der absolut kleinsten Wurzel einer in einer Umgebung von  $x = 0$  regulären und von Null verschiedenen Potenzreihe  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  wird durch den Konvergenzradius von  $f(x)^{-1}$  dargestellt. Die Abschätzung

$$r \geq |a_0| (|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots)^{-\frac{1}{2}},$$

welche ja mittels der Schwarzschen Ungleichung ohne weiteres folgt, wird auf überflüssig komplizierte Weise (Determinantendarstellung der Koeffizienten von  $f^{-1}$ , Anwendung des Hadamardschen Satzes) hergeleitet. Ähnlich wird der Schlichtheitsradius sowie der kleinste Abstand zweier  $A$ -Stellen von  $f(x)$  diskutiert.

Szegö.

**Marty, F.:** Sur le module des coefficients de Mac Laurin d'une fonction univalente. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1569—1571 (1934).

Es sei  $n$  ganz,  $n \geq 2$ , und  $f_n(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  bezeichne eine in  $|z| < 1$  regulär-schlichte Funktion, für welche  $|a_n|$  maximal und  $a_n$  reell-positiv ist. Verf. liefert zwei elementare Beiträge zu der viel erörterten Vermutung  $f_n(z) = z(1-z)^{-2}$ ,  $a_n = n$ . 1. Das Bildgebiet bei der Abbildung  $w = f_n(z)$  hat keine äußeren Punkte. 2. Es gilt  $2a_2 a_n = (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1}$ .

Szegö (Königsberg, Pr.).

**Stein, P.:** On inequalities for certain integrals in the theory of Picard functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 241—256 (1934).

Die Funktion  $P(s)$  sei regulär in  $|s| < 1$  und möge dort die Ausnahmewerte 0, 1 haben. Dann gilt für  $s = \varrho e^{i\vartheta}$ ,  $0 < \varrho < 1$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\log P(\varrho e^{i\vartheta})|^\mu d\vartheta < \begin{cases} \frac{A\mu^2}{1-\mu} \log \frac{1}{1-\varrho} + B, & \text{wenn } 0 < \mu < 1, \\ A \left( \log \frac{1}{1-\varrho} \right)^2 + B, & \text{wenn } \mu = 1, \\ \frac{B}{\mu-1} \left( \frac{1}{1-\varrho} \right)^{\mu-1}, & \text{wenn } 1 < \mu \leq 2, \\ B^{\mu-1} \left( \frac{1}{1-\varrho} \right)^{\mu-1}, & \text{wenn } \mu > 2. \end{cases}$$

Hier ist  $A$  eine positive absolute Konstante,  $B > 0$  hängt von  $P(s)$ , nicht aber von  $\varrho$  und  $\mu$  ab. Der Beweis beruht auf entsprechenden Abschätzungen von  $\log |Z|$  und  $\log^+ |Z|$ , wobei  $Z = Z(s)$  die Funktion bezeichnet, welche den Einheitskreis auf eine reguläre Riemannsche Fläche mit Windungspunkten unendlicher Ordnung in vorgelegten Punkten  $a_1, a_2, \dots, a_{q-1}$ ,  $\alpha$  abbildet. Das Vorbild der Untersuchung ist die Arbeit von Littlewood in Proc. London Math. Soc., II. s. 23, 481—519 (1924) sowie eine Weiterführung derselben durch R. Nevanlinna (vgl. Le théorème de Picard-Borel usw. 1929, 154); den Ausgangspunkt bildet die Greensche Integralformel, benutzt wird ferner ein eigenartiges Verfahren der Integration von Differentialungleichungen.

Szegö (Königsberg, Pr.).

**Bergmann, Stefan:** Sur les fonctions entières et méromorphes de deux variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1743—1745 (1934).

Verf. gibt je eine notwendige und eine hinreichende Bedingung an, damit zu einer

gegebenen unendlichen Folge in einem Bereiche  $\mathfrak{B}$  regulärer Funktionen  $n_i(w, z)$ ,  $= 1, 2, \dots$ , eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion  $f(w, z)$  existiert, welche die  $n_i$  und nur diese als Nullstellenfunktionen besitzt (d. h. so daß  $\frac{f(w, z)}{n_i(w, z)}$  für jedes  $i$  in  $\mathfrak{B}$  regulär und von Null verschieden ist); er stützt sich dabei auf die bekannten, von ihm aus der Theorie der Orthogonalfunktionen gewonnenen Mittel. [Zu dem Problem der Nullstellenfunktionen vgl. Bergmann, Proc. Koninkl. Akad. u. Wetensch. Amsterdam **35**, 1188 (1932) (vgl. dies. Zbl. **6**, 66) und Math. Ann. **109**, 324 (1934) (vgl. dies. Zbl. **8**, 216), Behnke-Thullen, Math. Ann. **109**, 313 (1934) (vgl. dies. Zbl. **8**, 319) und „Theorie d. Funkt. mehr. kompl. Veränderl.“, Ergebn. Math. III, **3**, 69 (vgl. dies. Zbl. **8**, 365)]. Zugleich stellt Verf. eine Beziehung her zwischen einer in einem Dizylinder regulären Funktion  $f(w, z)$  und den zu den Nullstellen- bzw. Polstellenfunktionen von  $f$  „gehörigen“ Greenschen doppelharmonischen Funktionen. Thullen (Rom).

**Germa, R.-H.-J.:** Sur la théorie des facteurs primaires de Weierstrass. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **3**, 48—51 u. 67—71 (1934).

Dans le produit infini classique de Weierstrass  $\prod_1^\infty P_n(z)$  servant à définir une fonction entière s'annulant en des points donnés  $a_n$ ,  $\lim |a_n| = \infty$ , l'auteur remplace, dans chaque facteur primaire  $P_n(z)$ ,  $z$  par  $z + g(z, n, r)$ ,  $g(z, n, r)$  étant une fonction entière de  $z$  dépendant de  $n$  et d'un paramètre positif  $r$ , telle que, pour chaque  $n$ ,  $g(z, n, r)$  tend vers 0 uniformément si  $|z| < \frac{r}{2}$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ ,  $|g(z, n, r)|$  restant en outre borné par un nombre fixe quels que soient  $n$  et  $r$  pourvu que  $|z| < r$ . Alors le produit transformé s'annulera en des points  $\alpha_n$  tendant vers les  $a_n$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ . L'a. considère uniquement le cas où  $g(z, n, r)$  est de la forme  $\varepsilon_n e^{-\theta_n r^{p_n+1}} f_n(z)$ ,  $f_n(z)$  étant une fonction entière donnée de genre  $p_n$  fini donné,  $\theta_n$  un nombre positif donné et  $\varepsilon_n$  choisi (en vertu du th. de Poincaré) pour que les conditions indiquées soient réalisées. Il ne donne pas d'application. G. Valiron (Paris).

**Thullen, P.:** Sur les singularités essentielles des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1670—1671 (1934).

Bei den Funktionen von  $n$  komplexen Veränderlichen entspricht dem isolierten, singulären Punkt  $P$ , in dessen Umgebung sich die gegebene Funktion  $f(z)$  eindeutig und regulär verhält, die analytische Fläche  $M$  von  $2n - 2$  Dimensionen, auf der  $(z_1, \dots, z_n)$  sich wesentlich singulär verhält, während in einem umgebenden Raumstück im übrigen  $f(z_1, \dots, z_n)$  regulär und eindeutig ist. Selbstverständlich werden dann in jeder Umgebung eines Punktes von  $M$  alle Werte mit höchstens einer Ausnahme angenommen. Verf. beweist, daß diese Ausnahmewerte für alle Punkte von  $M$  dieselben sind. Sein Hauptsatz lautet: Unter den obigen Voraussetzungen über  $M$  erfüllen die Lösungen der Gleichung  $f = a$  für jeden Wert von  $a$  eine analytische Fläche  $M_a$  der Dimension  $2n - 2$ , für welche jeder Punkt von  $M$  ein wesentlicher Randpunkt ist. Es kann aber ein Ausnahmewert  $a_0$  existieren, so daß die analytische Fläche  $G_{a_0}$  in der Nachbarschaft von  $M$  und auf  $M$  selbst sich algebraisch verhält, wenn  $f$  überhaupt den Wert  $a_0$  in der Nachbarschaft von  $M$  annimmt. Behnke (Münster i. W.).

**Levi, Beppo:** Sur les ensembles de points qui ne peuvent être ensembles de zéros d'une fonction analytique de plusieurs variables. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1735—1736 (1934).

Die Arbeit [wie auch eine frühere des gleichen Verf., Boll. Un. Mat. Ital. **13**, 1—5 (1934) und dies. Zbl. **8**, 265] enthält ein weiteres Verfahren zur Konstruktion von Punktmengen  $\mathfrak{M}$  mit einem einzigen Häufungspunkt  $P$  und der Eigenschaft, daß jede in  $P$  reguläre, auf  $\mathfrak{M}$  verschwindende Funktion  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  identisch verschwindet. Jedoch führen die Beispiele des Verf. nicht über die unmittelbar durch den Weierstraßschen Vorbereitungsatz gegebenen Kenntnisse der Nullstellen einer regulären Funktion  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  hinaus. Thullen (Rom).



# **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

**Schmidt, Robert:** Statistical analysis of one-dimensional distributions. Ann. math. Statist. 5, 30—72 (1934).

In this elementary exposition the author introduces certain new and suggestive applications of classical developments in orthonormal functions, to the problem of statistical distribution. Much of the present paper is devoted to a simple self-contained explanation of a standard orthonormalizing process. The central idea (which has not the novelty apparently claimed) concerns the use of  $(2n)$ -iles (as familiar in the case of quartiles, deciles, percentiles etc.), derived from the cumulative function of frequency, or indefinite integral of frequency. The "best values" of Ekke are the familiar odd  $(2n)$ -iles given by  $\xi_k = \psi(2k - 1/2n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , where  $\psi$  is the inverse of the cumulative function. Unpublished theorems of Ekke state minimal properties for this set (universally known for the case of  $n = 1$ , when  $\xi_1$  is the median). For a given  $n$  the set of best values are here regarded as a vector. Analogous vectors for each of the first  $n$  moments are introduced and a specially corresponding orthonormal set,  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ , is constructed. The given frequency function figures thereafter only through this set of vectors. A vector for a given set of  $n$  observations (arranged in order of magnitude) is used and its inner products by  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  respectively, namely  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , constitute the "Tchebycheff coefficients" of the given vector of observations. The author writes  $a_0 = M = \text{mean of the observations}$ ,  $a_1 = \sigma = \text{dispersion of the observations}$ ,  $a_2 = \text{Tchebycheff coefficient of Skewness of the observations}$ ,  $a_3 = \text{Tchebycheff coefficient of Kurtosis of the observations}$ . While  $a_0$  is found to be the usual arithmetic mean, all other coefficients are new, and depend upon the relations of the observations (ordered according to magnitude) to the orthonormalized sets obtained from the "best values". Control computations are explained and the ideas are illustrated. Further studies concerning these interesting new coefficients are promised. The "impressive" example on p. 64 is ruined by the author's mistake in selecting equidistant ordinates as "best values". *Bennett.*

**Goldziher, Karl:** Über Mittelwertinterpolation in der dynamischen Statistik. Versicherungswiss. 4, 781—796 (1934).

Dynamical statistics refers to the theory of statistical functions regarded as varying with the time. The intensity function  $\mu[y(x)]$  for a given static  $y(x)$ , is written as  $\mu_1(x) = y'(x)/y(x)$ . This yields by iteration, Moser's intensity functions of higher order, in particular,  $\mu[\mu_1(x)] = \mu_2(x)$ . The author defines the dynamic variation to be  $\lambda(x) = 1 - [\mu_1^*(x)/\mu_1(x)]$ , where  $\mu_1^*(x)$  is the value of the intensity after a time-increment. For given abscissa, the invariance of second order intensities under a time-increment (when the first-order intensity is throughout monotone) corresponds to an extremum for the dynamic variation — thus the author generalizes Bodenehr's theorem. This theorem is applied by use of mean-power interpolation expressible by

$$y(x) = [g(x) y_1^q + [1 - g(x)] y_2^q]^{1/q},$$

$q$  being a parameter, and  $g(x)$ , a weighting function. Verhulst's logistic curves for increase with time coupled with static mortality functions of the Makeham, Insolera or Gompertz type, emerge under simple, plausible but obviously empirical assumptions. Numerous recent references to related and contrasted views are given. *Bennett.*

**David, Florence N.:** On the  $P_{\lambda n}$  test for randomness: Remarks, further illustration, and table of  $P_{\lambda n}$  for given values of  $-\log_{10} \lambda_n$ . Biometrika 26, 1—11 (1934).

**Martin, E. S.:** On corrections for the moment coefficients of frequency distributions when the start of the frequency is one of the characteristics to be determined. Biometrika 26, 12—58 (1934).

● **Bowley, A. L.:** Grundzüge der mathematischen Ökonomik. Ins Deutsche übertragen v. Harro Bernardelli. (Beitr. z. quantitativen Wirtschaftsforsch. Hrsg.

**Eugen Altschul. Bd. 1.)** Leipzig: Hans Buske 1934. 130 S. u. 19 Fig. M. 8.—

Übersetzung des Buches „The Mathematical Groundwork of Economics“ (Oxford 1924), das die von Cournot begründete, von Jevons, Walras, Pareto, Edgeworth u. a. ausgearbeitete Theorie des wirtschaftlichen Gleichgewichts in knapper, klarer und einheitlicher Weise entwickelt. Es handelt sich nach einem Wort des Herausgebers um ein mathematisches „Modell einer arbeitsteiligen Wirtschaft“. Die Darstellung gipfelt in der Herleitung der allgemeinen Gleichungen des wirtschaftlichen Gleichgewichts zwischen einer beliebigen Zahl von Personen, von denen jede an der Produktion, am Austausch und am Konsum der Güter beteiligt sein kann. Eine Person wird in diesem Zusammenhang durch ihre „Nutzenfunktion“, das ist der Nutzen einer Kombination von Gütermengen als Funktion dieser Mengen, und weitere auf die Produktion bezügliche Funktionen charakterisiert. Die fraglichen Gleichgewichtsrelationen ergeben sich — abgesehen von trivialen wie Erhaltung der Warenmengen beim Tausch — als notwendige Bedingungen aus Extremumforderungen, z. B. nach maximalem Nutzen jeder Person. Gegen die Einführung der erwähnten Nutzenfunktion ist schon seit langem geltend gemacht worden, daß der Nutzen von Gütern nicht meßbar sei. Dem sucht der Verf. in der Einteilung Rechnung zu tragen. Es wird angenommen, daß für jede Person feststeht, ob ihr zwei Kombinationen von Gütermengen gleichwertig sind, bzw. welche sie vorzieht. Dies ist, wie Pareto entdeckt hat, zum Aufbau der Theorie völlig ausreichend, da in die Gleichgewichtsbedingungen nur die Niveaulinien bzw. -flächen der Nutzenfunktion eingehen. Der Verf. macht jedoch eine weitere (nur gelegentlich verwendete) Annahme, die im wesentlichen Vergleichbarkeit von Nutzendifferenzen besagt und die, wie sich zeigen läßt, eine Nutzenfunktion bis auf eine additive und eine multiplikative Konstante eindeutig festlegt, also doch auf Annahme der Meßbarkeit des Nutzens hinausläuft.

W. Fenchel (Kopenhagen).

## Numerische und graphische Methoden.

**Lehmer, D. H.: A machine for combining sets of linear congruences.** Math. Ann. 109, 661—667 (1934).

Die Lösung vieler Probleme der Zahlentheorie hat man zurückgeführt auf die Berechnung einer ganzen Zahl  $x$ , die  $(\text{mod } p_i)$  mit einer der gegebenen Zahlen  $a_{1i}$ ,  $a_{2i}, \dots, a_{n_i i}$  kongruent ist; die  $p_i$  bedeuten kleine Primzahlen oder deren Potenzen;  $i = 1, 2, \dots$ , bis 10, 20 oder 30, und  $n_i < p_i$ . Theoretisch liefert die Lösung dieser Kongruenzen gar keine Schwierigkeit, die praktische Berechnung der Zahl  $x$  ist jedoch sehr langwierig. Der Verf. hat nun eine Maschine gebaut, die automatisch die Lösung  $x$  berechnet, und die er kurz beschreibt. Für jede Primzahl  $p_i < 127$  hat er ein Zahnrad mit  $p_i$  (oder ein geeignetes Vielfaches) Zähnen genommen. Am Fuße eines jeden Zahnes ist ein Loch, und diese Löcher liegen bei allen 30 Rädern gleichweit vom Rande. Die Räder sind parallel aufgestellt und so, daß sie durch eine einzige Achse, die 30 gleiche kleinere Zahnräder enthält, gedreht werden können, jedes um seinen eigenen Mittelpunkt. Die Räder können also einen Stand einnehmen, wobei die Löcher an einer Stelle hintereinanderliegen und einen Lichtstrahl parallel zur Achse durchlassen. Um die Maschine zu gebrauchen, werden bei jedem Rade die nicht mit den Zahlen  $a_{1i}$ ,  $a_{2i}, \dots$  übereinstimmenden Löcher verschlossen, die Räder in den Nullstand gesetzt, und die Achse durch einen Elektromotor gedreht. Die Maschine kann man nun ohne Aufsicht drehen lassen, denn wenn  $x$  Zähne an der Achse vorbeigegangen sind, geht der Lichtstrahl durch alle Räder, fällt auf eine Photozelle, und der Strom, der den Elektromotor treibt, wird unterbrochen. Später kann man die Achse langsam zurückdrehen, nachdem man das Auge an die Stelle der Photozelle gesetzt hat, bis der Lichtstrahl wiederum durchkommt. Auf einem Tourenzähler wird  $x$  abgelesen. Durch Beispiele wird der Gebrauch der Maschine weiter illustriert. Siehe auch dies. Zbl. 6, 248 und 7, 315.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Jeffreys, H.: On smoothing and differentiation of tables.** Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 134—138 (1934).

Der Gedankengang schließt an die Arbeiten von L. P. Comrie (Monthly Not. Geophys. Suppl. 3, 10—13) und G. H. Darwin (Sci. Papers 4, 298) an. Bei fünf quidistanten Observationen, die nach einer Funktion dritten Grades ausgeglichen werden können, ist es eine Verbesserung, die Observation in der Mitte um  $\frac{1}{12}$  der



vierten Differenz zu korrigieren. Die Arbeit ist eine Weiterführung dieses Gedankenganges, und die Resultate werden mit denen von Whittaker and Robinson: *Calculus of Observations*, 303—312, verglichen. *Burrau* (Kopenhagen).

**Deming, W. Edwards:** On the application of least squares. II. *Philos. Mag.*, VII. s. 17, 804—829 (1934).

Im Anschluß an eine frühere Abhandlung des Verf. (*Philos. Mag.*, VII. s. 11, 146; vgl. dies. Zbl. 1, 150) werden Beispiele für die Ausgleichung von Beobachtungen mit Berechnung von Parametern gegeben. Behandelt werden: das logarithmische Dekrement der Schwingungen eines Waagebalkens, das gewöhnliche Exponentialgesetz und Gesetze, die durch die Gleichungen  $ya^x = b$ ,  $yz^x = b$ ,  $yz^x = w$  ( $a, b$  Parameter,  $x, y, z, w$  beobachtete Koordinaten) dargestellt werden. Die letzten drei Gleichungen treten bei der Bestimmung von  $e$  (Elektronenladung) und  $h$  (Plancksche Konstante) unter verschiedenen Bedingungen auf: 1. weder  $e$  noch  $h$  ist direkt gemessen, 2. unmittelbare Beobachtungen von  $e$  sind zu berücksichtigen, 3. unmittelbare Beobachtungen von  $e$  und  $h$  sind zu berücksichtigen. Für die Ausführung der praktischen Rechnung werden Winke zu deren Vereinfachung gegeben. *Schmehl* (Potsdam).

**Schlesinger, Frank:** Solutions by least squares without normal equations. *Astron. J.* 43, 89—92 (1934).

If good first approximations to the unknowns in a set of linear observation equations are at hand and if the unknowns are independent, or nearly so, better approximations can be obtained without solving the normal equations, but by dividing the sums of the residuals, calculated using the approximations, by the leading terms of the corresponding normal equations. Numerical examples are given. *C. C. Craig*.

**Vercelli, Francesco:** Metodi pratici per l'analisi delle curve oscillanti. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* 1, 364—383 (1934).

Verf. gibt eine allgemeinverständliche Übersicht über die Grundgedanken der einfacheren numerischen und graphischen Verfahren für die Analyse periodischer Vorgänge und bespricht ausführlich, mit Angabe verschiedener Erleichterungen für die praktische Anwendung, die Methode der symmetrischen Zusammenstellungen.

*Bossolasco* (Turin).

**Ernst, P. W., und S. Fehér:** Der Neigungswinkel der Schaulinie und die Ablesegenauigkeit. *Z. Instrumentenkde* 54, 155—158 (1934).

**Gebauer, Jan:** Sur les séries applicables dans l'intégration approximative. *Čas. mat. fys.* 63, 152—166 u. franz. Zusammenfassung 166 (1934) [Tschechisch].

K. Petr hat ohne Beweis folgende Formel zur numerischen Berechnung eines bestimmten Integrals angegeben:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k h^{k+1} (f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)) + R_n, \quad h = b - a,$$

$$A_{2k-1} = \binom{n-k}{k} \cdot \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4k-2)(4n-2)(4n-6) \dots (4n-4k+2)},$$

$$A_{2k} = \binom{n-k+1}{k} \cdot \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4k+2)(4n-2)(4n-6) \dots (4n-4k+2)},$$

$$R_n = h^{2n+1} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)!} \cdot f^{(2n)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

[*Čas. mat. fys.* 44, 454, 455 (1915).] In der vorliegenden Abhandlung handelt es sich hauptsächlich um die Herleitung dieser Formel; es wird aber vorausgesetzt, daß  $f(x)$  in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, und das Restglied  $R_n$  wird in der Form einer unendlichen Reihe angegeben.

*Rychlik* (Prag)

**Lüdemann, Karl:** Über die Genauigkeit von Flächenberechnungen mit dem Beilschneidenplanimeter nach H. Prytz. *Z. Vermessgswes.* 63, 259—264 (1934).

Bericht über eigene und fremde (21 Schriftennachweise) Untersuchungen über

ie Genauigkeit des Beilplanimeters mit dem Ergebnis, daß als mittlerer Fehler bei Flächen von 10—100 cm<sup>2</sup> etwa  $\pm 1\%$  erwartet werden kann. *G. Koehler* (Erfurt).

**Heywood, Harold:** Calculation of the specific surface of a powder. *Inst. mech. Engrs, Proc.* **125**, 383—459 (1933).

**Jordan, Kurt:** Anwendungsmöglichkeit der Rechenmaschine bei trigonometrischen Rechnungen. *Z. Vermessungswes.* **63**, 265—269 (1934).

## Geometrie.

**Sapin, A.:** Sur la trigonométrie sphérique. *Mathesis* **48**, 161—163 (1934).

**Leemans, J.:** Sur la géométrie du triangle. *Mathesis* **48**, 207—208 (1934).

**Vondráček, Aug.:** Généralisation du théorème de Feuerbach. *Čas. mat. fys.* **63**, 54—258 (1934) [Tschechisch].

Etant donnés deux points  $M, N$  et trois droites  $a, b, c$ , on peut construire quatre coniques  $k_0, k_1, k_2, k_3$  passant par  $M, N$  et ayant  $a, b, c$  pour tangentes. L'auteur démontre synthétiquement l'existence d'une cinquième conique  $q$ , passant par  $M, N$  et tangente aux quatre coniques  $k_0, k_1, k_2, k_3$ . *Autoreferat.*

**De Finetti, Bruno:** Le isomerie vettoriali e una formula di Cisotti per gli spostamenti gidi. *Ist. Lombardo, Rend., II. s.* **67**, 81—98 (1934).

In this paper the author discusses finite rotations of a rigid body (= proper orthogonal matrices of three rows and columns) by means of a formula due to Cisotti. He shows the connection of this formula with the formulae of Rodrigues (giving the parametric representation of three rowed orthogonal matrices). The composition of rotations about concurrent axes is discussed. *Murnaghan* (Baltimore).

**Noi, Salvatore di:** Moto di una figura piana deformabile che rimane affine a se stessa. *Period. Mat., IV. s.* **14**, 178—189 (1934).

L'a. expose géométriquement les résultats que M. Pascal a obtenu par voie analytique, Sur le mouvement d'une figure plane variable qui reste affine à elle même et dans le cas d'une figure plane variable avec conservation d'aire (voir ce Zbl. **7**, 358). *Abramescu* (Cluj).

**Conforto, Fabio:** La proiettività nel campo complesso. *Period. Mat., IV. s.* **14**, 33—157 (1934).

Zumeist synthetische Behandlung der eigentlichen Kreisverwandtschaften in der Gausschen Ebene. Konstruktion der Kreisverwandtschaft aus drei Paaren entsprechender Punkte. Fixpunkte dieser Verwandtschaft. (Konstruktion und analytische Behandlung.) Involuntionen. Klassifikation der Kreisverwandtschaften. [In der Literaturübersicht fehlen die grundlegenden Arbeiten: E. Study, *Math. Ann.* **49**, (1897), J. L. Coolidge, *A treatise on the circle and the sphere*. Oxford 1916. Kap. IV.] *E. A. Weiss* (Bonn).

**Pomey, Léon:** Sur les involutions unieursales du quatrième ordre. *C. R. Acad. Sci., Paris* **198**, 1833—1835 (1934).

Die bereits (vgl. dies. Zbl. **7**, 72) für die Involution  $I_3$  gelösten Aufgaben werden für die  $I_4$  behandelt: Auf einem Grundkegelschnitt eine  $I_4$  zu konstruieren, die durch vier Punktquadrupel vorgegeben ist; die vierfachen Punkte dieser  $I_4$  zu finden. *E. A. Weiss* (Bonn).

**Vries, Jan de:** Abbildung einer besonderen Kongruenz von Kegelschnitten auf das Punktfeld. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **37**, 204—206 (1934).

Es wird eine Kongruenz von Kegelschnitten  $k^2$  betrachtet, die durch einen festen Punkt  $B$  gehen, einen gegebenen Kegelschnitt  $a^2$  zweimal treffen und die festen Geraden  $c_1, c_2$  schneiden; die Verbindungsgerade dieser Punkte auf  $c_1$  und  $c_2$  trifft die Hildebene  $E$  im Bildpunkt  $K$  von  $k^2$ . Durch einen beliebigen Raumpunkt gehen drei  $k^2$ . Alle  $k^2$ , die eine vorgegebene Gerade treffen, bilden eine Fläche 16. Grades und geben als Bild eine Kurve 6. Ordnung. Die  $k^2$ , die  $a^2$  berühren, bilden eine Fläche 10. Grades



und bilden sich in eine Kurve 4. Ordnung ab. Soll  $k^2$  eine beliebige Ebene berühren, so entsteht eine Fläche 22. Grades und eine Bildkurve 8. Ordnung. *Eckhart.*

**Danielsson, Ólafur:** Sätze über Scharen von Flächen zweiter Ordnung. *Math. Ann.* 109, 521—524 (1934).

Betrachtet wird die Schar  $S$  aller  $F_2$ , die 8 Ebenen allgemeiner Lage berühren. Es wird auf zweierlei elegante Weise bewiesen: Alle Schnittkurven irgendzweier Flächen von  $S$  haben dasselbe Doppelverhältnis, und dieses ist das Dv. des Reyekomplexes, dem die Erzeugenden aller Flächen von  $S$  angehören. Anwendung auf die Krümmungslinien eines konfokalen  $F_2$ -Systems. *Cohn-Vossen (Zürich).*

**Klíma, Josef:** Sur les courbes et les surfaces engendrées par les droites joignant les couples de points correspondants sur deux courbes en homographie. *Čas. mat. fys.* 63, 236—246 (1934) [Tschechisch].

**Seifert, L.:** Quelques remarques sur le pectenoïde. *Čas. mat. fys.* 63, 247—253 (1934) [Tschechisch].

On appelle pectenoïde la surface du quatrième degré dont l'équation peut s'écrire sous la forme  $(x^2 + y^2 + z^2)z^2 - h^2x^2 = 0$ . On peut trouver une construction bien simple de la tangente asymptotique en un point général de la surface réglée en question. *Auszug.*

### Differentialgeometrie:

**Lovett, E. O.:** Sur certaines courbes gauches qui généralisent les coniques. *C. R. Acad. Sci., Paris* 198, 1662—1665 (1934).

Es wird eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in ebenen bzw. sphärischen Polarkoordinaten angegeben, die sich trotz Vorkommens willkürlicher Funktionen einer Variablen (nämlich des Polarwinkels) allgemein durch Quadraturen integrieren läßt, und die die ebenen bzw. sphärischen Kegelschnitte liefert, wenn man jene Funktionen stark spezialisiert. Entsprechend wird ein lineares System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in kartesischen Raumkoordinaten angegeben, das willkürliche Funktionen einer Variablen enthält, und das bei Spezialisierung dieser Funktionen als Integrale die kubischen Raumkurven liefert. *Cohn-Vossen (Zürich).*

**Constantinidès, Ph. D.:** Sur les courbes admettant le même plan rectifiant. *Bull. Soc. Math. Grèce* 15, Nr 1, 24—29 (1934).

Hauptsatz: Bei einparametrischer Bewegung einer Ebene  $E = E(t)$  im Raum umhüllt jede in  $E$  feste Gerade eine Raumkurve, deren rektifizierende Ebenen  $E(t)$  sind. — In dieser Allgemeinheit ist das natürlich falsch. Verf. macht aber die stillschweigende Voraussetzung, daß  $E(t)$  auf der von der Schar umhüllten Torse abrollt, und dann wird der Satz ziemlich trivial, weil in jedem Augenblick ein Punkt  $P(t)$  der mitgeführten Geraden  $g$ , nämlich der Schnittpunkt von  $g$  mit der Charakteristik  $c(t)$  von  $E(t)$ , stillsteht. Also muß  $g$  eine von  $P(t)$  beschriebene Raumkurve umhüllen. Da  $c(t)$  stillsteht, bewegt sich jeder von  $P$  verschiedene Punkt von  $g$  senkrecht zu  $E(t)$ , also ist  $E(t)$  senkrecht zur Schmiegeebene von  $P(t)$ , also, weil die Tangente  $g$  von  $P(t)$  enthaltend, rektifizierende Ebene von  $P(t)$ . — Vgl. dies. Zbl. 8, 174. Der dort erhobene Einwurf des Ref. ist unberechtigt, weil Verf. auch in jener Arbeit in der Tat von Rollvorgängen ausgeht. *Cohn-Vossen (Zürich).*

**Agostinelli, Cataldo:** Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estendibili di una  $V_3$ . *Atti Accad. Sci. Torino* 69, 204—224 (1934).

In einer  $V_n$  sei eine  $V_m$  mit dem Einheitsaffinor  $B_\lambda^\nu$  gegeben. Dann gilt für jedes, längs  $V_m$  gegebene Vektorfeld  $s_\lambda$

$$B_\lambda^\alpha B_\mu^\beta V_\alpha s_\beta = V_\lambda' s_\mu' - H_{\lambda\mu}^\nu s_\nu, \quad (s_\lambda' = B_\lambda^\nu s_\nu)$$

(Struik, „Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie ...“ Berlin 1922, S. 94, Formel 144). Daraus folgt sofort für  $dx$  in  $V_m$

$$\delta s_\lambda = dx^\mu (a_{\mu\lambda} + b_{\mu\lambda}), \quad (1)$$

$$a_{\mu\lambda} = V'_{(\mu} s'_{\lambda)} - H_{\mu\lambda}{}^{\nu} s_{\nu}, \quad b_{\mu\lambda} = V'_{[\mu} s'_{\lambda]} + (\delta_{\lambda}^{\beta} - B_{\lambda}^{\beta}) B_{\mu}^{\alpha} V_{\alpha} s_{\beta}.$$

aus (1) folgt, wenn  $K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$  der Krümmungsaffinor von  $V_n$  ist

$$\frac{1}{2} K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} \frac{dx^{\mu}}{2} \frac{dx^{\omega}}{1} \frac{dx^{\nu}}{2} = dx^{\omega} \frac{dx^{\mu}}{1} (V_{\omega} a_{\mu\lambda} + V_{\omega} b_{\mu\lambda}). \quad (2)$$

in dem einfachsten Falle  $m = 2$ ,  $n = 3$  läßt sich bekanntlich  $V'_{[\mu} s'_{\lambda]}$  durch den zu  $V_2$  orthogonalen Vektor ersetzen. Der Verfasser benützt diesen Tatbestand, um aus (2) (für  $m = 2$ ,  $n = 3$ ) das Feld  $s_{\lambda}$  (nicht aber seine Projektion  $s'_{\lambda}$  in  $V_2$ , welche in  $\mu\lambda$  in dem Ausdruck  $V'_{(\mu} s'_{\lambda)}$  auftritt) zu eliminieren. *Hlavatý (Praha).*

**Delgelize, A.:** Sur les transformations de Ribaucour et la déformation infiniment petite des surfaces. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3, 72—75 (1934).

La transformation  $R$  (= de Ribaucour = deux nappes de l'enveloppe de  $\infty^2$  sphères qui correspondent par leurs lignes de courbure) d'une surface  $S$  dépend de quatre fonctions  $\gamma_1, \gamma_2, \omega, q$ . L'auteur examine des transformations  $R$  dont la fonction  $\omega$  coïncide avec la fonction caractéristique  $\psi$  de Weingarten qui détermine la déformation infiniment petite de  $S$ . La surface  $S$  en question est une surface isothermique; la surface associée au sens de Bianchi est la transformée de Christoffel de  $S$ .

*S. Finikoff (Moscou).*

**Matsumura, Sôji:** Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. VIII. Mem. Fac. Sci. a. Agricult. Taihoku Univ. 10, 37—70 (1933).

Le mémoire contient 13 paragraphes dont chacun traite une question différente: invariant simultané de deux plans dans l'espace de Lobatchevsky, la condition de l'applicabilité de deux surfaces, la condition caractéristique d'une congruence de sphères de Ribaucour etc.

*S. Finikoff (Moscou).*

**Sypták, M.:** Sur les hypercironférences et hyperhélices généralisées dans les espaces euclidiens à  $p$  dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1665—1667 (1934).

Unter einem verallgemeinerten Hyperkreis (bzw. einer Hyperschraubenlinie) wird eine Kurve des  $2n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $R^{2n}$  (bzw. des  $R^{2n+1}$ ) verstanden, deren Krümmungen  $a_1, a_2, \dots$  in konstanten Verhältnissen  $a_1/a_2, a_2/a_3, \dots$  stehen. Es werden Eigenschaften der gewöhnlichen Hyperkreise bzw. -schraubenlinien (die man für konstante Krümmungen erhält) auf die verallgemeinerten Hyperkreise bzw. -schraubenlinien übertragen. Insbesondere werden die Projektionen dieser Kurven auf ein System paarweise senkrechter Ebenen untersucht und die Gleichungen der Kurven aufgestellt.

*H. Seifert (Dresden).*

**Dantzig, D. van:** On conformal differential geometry. I. The conformal gradient. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 216—221 (1934).

Der Verf. sucht einen Differentialoperator in bezug auf die konformen Variablen. Dieses Problem, das bis jetzt in voller Allgemeinheit nicht gelöst wurde, läßt sich auf folgendes zurückführen: Ein gegebenes Feld, das für Punkte von  $C_n$  definiert ist, soll zu einem Felde, das für (Hyper)kugeln in  $C_n$  definiert ist, „verlängert“ werden. Der Verf. löst in vorliegender Arbeit dieses Problem für Skalarfelder in einem „konformen“ Raume. Wegen Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

*Hlavatý (Praha).*

**Tschernjaeff, M.:** Die Definition der Flächen, deren affine Normalen die fixierten Punkte durchschneiden. Œuvres sci. Univ. État, Rostoff sur Don 1, 119—121 u. dtsh. Zusammenfassung 121 (1934) [Russisch].

La surface désignée au titre est déterminée en coordonnées cartésiennes par deux équations en dérivées partielles du troisième ordre. L'auteur montre que la première équation possède un intégral intermédiaire du second ordre. *S. Finikoff (Moscou).*

**Tschernjaeff, M.:** Über ein Theorem von M. d'Ocagne und seine Verallgemeinerung in der affinen Differentialgeometrie. Œuvres sci. Univ. État, Rostoff sur Don 1, 122—123 u. dtsh. Zusammenfassung 123 (1934) [Russisch].

Si l'on met sur les droites parallèles menées par les centres de courbure d'une



courbe plane  $C$  des segments égaux aux rayons de courbure principaux correspondants; les points obtenus composent une courbe dont les tangentes passent par les points homologues de  $C$ . L'auteur étend ce théorème de M. d'Ocagne à la géométrie affine en prenant les centres et les rayons de courbure affines. *S. Finikoff* (Moscou).

**Tschernjaeff, M.: Über eine Eigenschaft des Mittelpunktes der Affinenkrümmung einer ebenen Kurve.** Œuvres sci. Univ. État, Rostoff sur Don 1, 124—125 u. dtsh. Zusammenfassung 126 (1934) [Russisch].

Soit  $M_1$  le point d'intersection de rayon vecteur  $OM$  d'une courbe plane  $C$  avec la droite  $AM_1$  menée par le point fixe  $A$  parallèlement à la normale affine  $MN$  de  $C$ ;  $B$  — le point d'intersection de  $OM$  avec une droite parallèle à la tangente de  $C$ , menée par le point où  $MN$  coupe  $OA$ . Ceci posé, l'auteur démontre que la droite qui passe par  $B$  et est parallèle à la tangente de  $(M_1)$  coupe la normale  $MN$  au centre de courbure affine. *S. Finikoff* (Moscou).

**Tschernjaeff, M.: Über eine Eigenschaft der Äquitangentialkurve der Doppelkrümmung.** Œuvres sci. Univ. État, Rostoff sur Don 1, 127—130 u. dtsh. Zusammenfassung 130 (1934) [Russisch].

Si l'on met sur chaque tangente d'une courbe gauche  $C$  un segment constant; les points obtenus composent une courbe équitangentielle  $C_1$ . L'auteur démontre: 1° Le centre de la sphère osculatrice de  $C$  se pose sur l'axe de courbure de  $C_1$ . 2° L'axe de courbure de  $C$  est situé dans le plan normal de  $C_1$ . *S. Finikoff* (Moscou).

**Rozet, O.: Sur certaines congruences  $W$  attachées aux surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques.** Bull. Sci. math., II. s. 58, 141—151 (1934).

Soit  $(x)$  et  $(y)$  — deux surfaces de M. Godaux (ayant les mêmes quadriques de Lie). Des points  $U$  et  $V$  étant des images des tangentes asymptotiques de  $(x)$  sur l'hyperquadrique de Klein, la suite de Laplace  $(U) = (V)$  a la période six et la congruence  $(U_2 V_2)$  représente le faisceau des tangentes à la surface  $(y)$ . Ceci posé, l'auteur examine une congruence  $W$  décrite par une tangente  $j$  de  $(x)$  dont l'image  $J$  donne naissance à une suite de Laplace périodique à période six ...  $J_{-1} J_1 J_2 \dots$ . Le point opposé  $J_3 = J_{-3}$  représente une tangente  $\bar{j}$  de  $(y)$  qui engendre une congruence  $W$ . Les seconds foyers  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  de  $(j)$  et de  $(\bar{j})$  engendrent un autre couple de surfaces de M. Godaux qui sont projectivement identiques à  $(y)$ ,  $(x)$  et dont les droites  $x\bar{y}$ ,  $y\bar{x}$  appartiennent à une même congruence linéaire. *S. Finikoff* (Moscou).

**Pantazi, Al.: Sur les quadruples stratifiables conjugués.** C. R. Acad. Sci., Paris 1986 1668—1670 (1934).

Deux congruences  $(M_1 M_2)$ ,  $(M_3 M_4)$  forment un couple stratifiable, s'il existe deux familles de surfaces  $S$ ,  $S'$  telles que leurs plans tangents aux points de rencontre avec  $M_1 M_2$  passent par  $M_3 M_4$  et vice versa. Le couple est conjugué si les développables correspondent. Les points  $M_1$ ,  $M_3$  et  $M_2$ ,  $M_4$  étant des foyers homologues, les congruences  $(M_1 M_4)$ ,  $(M_2 M_3)$  forment alors un couple stratifiable. S'il est conjugué, le couple  $(M_1 M_3)$ ,  $(M_2 M_4)$  possède la même propriété et le tétraèdre  $M_1 M_2 M_3 M_4$  engendre un quadruple stratifiable conjugué. Ceci posé, l'auteur signale les théorèmes: 1° Une congruence  $\mathfrak{D}\mathfrak{Z}$  (= Darboux-Tzitzéica = qui réalise sur une quadrique  $Q$  une transformation en même temps de Ribaucourt et de Koenigs-Moutard) formée avec sa réciproque par rapport à  $Q$  un quadruple conjugué, le quadruple général dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument. Toutes les six congruences du quadruple sont  $\mathfrak{D}\mathfrak{Z}$ . Sur les nappes focales d'une congruence  $\mathfrak{D}\mathfrak{Z}$  les lignes de Darboux correspondent aux lignes de Segre; leurs asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires. Les rayons  $M_1 M_2$ ,  $M_3 M_4$  sont les directrices de Wilczynski de  $S$ ,  $S'$ . 2° Les congruences  $W$  à focales réglées forment des quadruples conjugués avec une fonction arbitraire d'un argument. 3° Les autres catégories de quadruples conjugués dépendent de constantes arbitraires. Parmi celles-ci l'auteur mentionne des qua-

riples contenant quatre congruences particulières de M. Čech qui réalisent une application projective entre leurs nappes focales. *S. Finikoff* (Moscou).

**Givens jr., J. W.: Projective differentiation of spinors.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **20**, 232—233 (1934).

Ein projektiver Zusammenhang  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\times}$  bestimmt eine kovariante Ableitung für contra- bzw. kovariante Spindichten vom Gewicht  $+1/4$  bzw.  $-1/4$  mittels der Forderung  $\nabla_{\lambda}\gamma^{\alpha A}_{\phantom{\alpha A}B} = 0$ . Verf. ergänzt den Beweis eines Satzes von Veblen und Taub Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **20**, 85—92 (1934); dies. Zbl. **8**, 418], n. 1., daß das Verschwinden der kovarianten Ableitung der Fundamentalspinordichte  $\gamma^A_{\phantom{A}B}$  (O. Veblen, dies. Zbl. **8**, 183) die n. u. h. Bedingung für die Realität von  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\times}$  ist. *J. Haantjes*.

**Vanderslice, John L.: Non-holonomic geometries.** Amer. J. Math. **56**, 153—193 (1934).

This paper develops the general theory of non-holonomic geometries as generalizations of Klein geometries, starting from a set of fundamental postulates, closely connected to those given by Veblen and Whitehead. By a non-holonomic geometry is meant a geometry in which "parallel" displacements of a configuration along a closed circuit do not necessarily lead back to the original configuration, and in which there is locally a so-called "Klein geometry", that is, a geometry in the sense of the Erlanger program. A Riemannian manifold has the most familiar type of such a geometry. The paper gives a series of postulates on the general type of manifold introduced, on Klein geometries and on the way they enter into a geometry of linear displacement. The displacement, the curvature tensor, the preferred coordinate systems, are carefully analysed and existing gaps are filled. The theory is applied to the generalized affine geometry and the generalized projective geometry. The author investigates the relation between displacement and connection, deals with the problem of equivalence of two manifolds and the relation between projective and affine tensors. In the final section he indicates how the non-holonomic non-euclidean, euclidean and affine geometries can be obtained as specializations of projective geometry. *Struik*.

● **Thomas, Tracy Yerkes: The differential invariants of generalized spaces.** Cambridge: Univ. press 1934. X, 241 S. geb. 21/-.

Inhaltsübersicht: I.  $N$ -dimensional spaces. II. Affine and related invariants. III. Projective invariants. IV. Conformal invariants. V. Normal coordinates. VI. Spatial identity. VII. Absolute scalar differential invariants and parameters. VIII. The equivalence problem. IX. Reducibility of spaces. X. Functional arbitrariness of spatial invariants. — Das vorliegende Buch kann folgendermaßen charakterisiert werden: a) Es werden ausschließlich Probleme des  $n$ -dimensionalen Raumes behandelt, während die „Unterräume“ [mit Ausnahme von „paths“] außer acht gelassen werden. b) Die Probleme werden größtenteils mit Hilfe von Normalkoordinaten behandelt. Damit hängt auch zusammen, daß c) manche kovariante Resultate mittels nichtkovarianter Rechnungen hergestellt werden. — Der Verf. hat zur Entwicklung der Differentialgeometrie des  $n$ -dimensionalen Raumes wichtige Resultate in verschiedenen Einzelarbeiten beigetragen. (Z. B. die affine Auffassung der projektiven Geometrie, Untersuchungen über Normalkoordinaten und Normaltensoren, konforme Geometrie, usw.). In diesem Buche hatte er die Gelegenheit, vorwiegend eigene Resultate zusammenfassend anzuführen. Besonders soll die gründliche Behandlung der Normaltensoren (und der damit zusammenhängenden Fragen) erwähnt werden. Die Normaltensoren werden wohl am einfachsten mittels der Normalkoordinaten konstruiert, dagegen gibt es aber auch viele (bekannte) Resultate, die mittels kovarianter Rechnung hergestellt werden könnten, obwohl der Autor auch in diesen Fällen nichtkovariante Rechnungen vorzieht. Ein glücklicher Gedanke ist die Behandlung der Transformationsgleichungen der Bestimmungszahlen der Größen mittels der Lieschen Gruppentheorie. — Im Einzelnen ist insbesondere folgendes hervorzuheben: Die sehr weittragende Definition (und Konstruktion) der affinen, projektiven und konformen differentialinvarianten Größen samt algebraischer Behandlung derselben, die verschiedenen Identitäten der Normaltensoren (samt „Extensionen“), die Auffindung der affinen und metrischen differentialinvarianten Skalaren mittels der schon erwähnten Lieschen Gruppentheorie, die gründliche Behandlung verschiedener Äquivalenzprobleme, sowie (im letzten Kapitel) die Behandlung der funktionalen Unabhängigkeit der Bestimmungszahlen von Größen, die mit einer Konnexion verbunden sind. — Überall kommen in diesen Problemen die Normaltensoren zur Geltung, so daß dieses Buch in einem gewissen Sinne als ein (übrigens gelungener) Beweis — der weitgehenden Tragfähigkeit des Begriffes der Normaltensoren — aufgefaßt werden kann. *Hlavatý* (Praha).



**Topologie:**

● Seifert, H., und W. Threlfall: **Lehrbuch der Topologie.** Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1934. VII, 353 S. u. 132 Fig. geb. RM. 20.—

Das Buch löst — wohl zum erstenmal — die schwierige Aufgabe, ein Lehrbuch und gleichzeitig einen Querschnitt durch die Topologie in ihrem heutigen Zustand zu geben und dabei im vollen Maße sowohl die logische Strenge als auch die konkrete Anschaulichkeit der Darstellung zu wahren. Der allgemeine Charakter des Buches ist weder rein kombinatorisch noch mengentheoretisch, sondern geometrisch. Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt, die algebraischen Hilfsmittel werden in einem besonderen Kapitel (dem Schlußkapitel des Buches) zusammengestellt. Es werden ausführlich behandelt: die ganze Homologietheorie der Komplexe mit den zugehörigen Invarianzsätzen, die Flächentopologie, die Fundamentalgruppe und die Überlagerungstheorie, die Theorie der drei- und die Theorie der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, schließlich (kurz) die Theorie der stetigen Abbildungen. Im ersten Kapitel werden an ganz einfachen Beispielen die Grundbegriffe und -probleme der Topologie klargemacht. Das zweite Kapitel bringt die notwendigen mengentheoretischen Begriffe auf der Basis des Umgebungsraumes. Hierselbst wird auch der Begriff des Komplexes eingeführt, untersucht und durch zahlreiche Beispiele dem Leser nahegebracht. Im dritten Kapitel kommen die Homologiegruppen, die für mehrere Beispiele auch wirklich ausgerechnet werden. Das vierte Kapitel ist den simplizialen Approximationen, den stetigen („singulären“) Komplexen und der Invarianz der Homologiegruppen gewidmet. Das fünfte Kapitel stellt sich auf den Boden der lokalen Eigenschaften: es werden die Homologiegruppen in einem Punkt eingeführt und ihre Invarianz wird bewiesen. Hieraus ergeben sich weitere Invarianzsätze — für die Dimension, das  $n$ -dimensionale Gebiet, die Pseudomannigfaltigkeiten. Nach einer vollständigen aber sehr kurz gelungenen Behandlung der Flächen im sechsten Kapitel wird mit besonderer Sorgfalt und besonderer Anschaulichkeit (viele Beispiele, Figuren, Aufgaben!) darauf sich um die Begriffe Fundamentalgruppe und Deformation gruppierende Material behandelt. Hieran schließen: die Überlagerungen im achten und die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten im neunten Kapitel an. Die allgemeine Theorie der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten im zehnten Kapitel wird von vorneherein auf die Basis der allgemeinen Homologiedefinitionen (Alexander, Pontrjagin, van Kampen) gestellt und bis zur vollständigen Theorie der Schnitt- und Verschlingungszahlen und dem Poincaréschen Dualitätssatz fortgeführt. Im elften Kapitel kommen die stetigen Abbildungen von Komplexen: der Abbildungsgrad, die Euler-Poincaré-Hopf'sche Formel, die Anwendungen auf Existenzsätze für Fixpunkte. Das zwölfte Kapitel bringt die gruppentheoretisch-algebraischen Hilfsmittel. Den meisten Kapiteln werden kurze Zusammenfassungen vorangeschickt, viele Beispiele, Aufgaben; Figuren gibt es 132 auf 292 Seiten topologischen Textes.

P. Alexandroff (Moskau).

Waraszkiewicz, Z.: Sur un problème de M. H. Hahn. *Fundam. Math.* 22, 180 bis 205 (1934).

The author gives a negative solution to the well known problem of Hahn as to whether there exists a “model” continuum  $H$  such that any continuum whatever is the continuous image of  $H$ . The solution is effected by constructing an uncountable family  $S$  of continua having the property that if  $H$  is an arbitrary continuum, then for a certain  $\varepsilon > 0$  it is true that if  $f$  and  $g$  are arbitrary continuous transformations defined on  $H$  such that  $f(H) \varepsilon S$ ,  $g(H) \varepsilon S$ , and  $\sup_{x \in H} \rho[f(x), g(x)] < \varepsilon$ , then  $f(H) = g(H)$ .

It follows from this that if any continuum  $H$  were a “model” for all continua of  $S$  then the space of all continuous transformations of  $H$  into subsets of a cone of revolution  $R$  could not be separable, which, however, is known to be true. The family of continua  $S$  is constructed on the lateral surface of a cone of revolution  $R$ . Two spirals  $\sum^+$  and  $\sum^-$  are chosen on  $R$ , each approaching the circumference of the base  $B$  of  $R$  asymptotically. Then for each infinite sequence  $v$  of integers, a combination of loops of  $\sum^+$  and  $\sum^-$  is taken to form, together with  $B$ , a continuum  $S_v$  in such a way that the class  $S = [S_v]$  has the desired properties.

G. T. Whyburn (Baltimore).

Lefschetz, S.: On locally connected and related sets. *Ann. of Math.*, II. s. 35, 118 bis 129 (1934).

Verf. untersucht die Beziehungen zwischen den in seinem Sinne mehrdimensional-lokal-zusammenhängenden kompakten metrischen Räumen und den (verschiedenen Typen von) Retrakten (im Sinne von Borsuk). Es wird bewiesen, daß die absoluten Umgebungsretrakte mit den im Lefschetz'schen Sinne lokal-zusammenhängenden Räumen identisch sind. [Vgl. auch Borsuk, *Fundam. Math.* 19

240 (1932); dies. Zbl. 5, 265.] Eine analoge Charakterisierung wird auch für schlechtweg absolute Retrakte gegeben. — Außerdem wird folgende mehr kombinatorische Charakterisierung der absoluten Umgebungsretrakte gegeben:  $F$  ist dann und nur dann ein absoluter Umgebungsretrakt, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gehört, so daß jeder  $\delta$ -Komplex in  $F$  als Eckpunktnetz eines stetigen  $\varepsilon$ -Komplexes (singular Komplex) in  $F$  aufgefaßt werden kann. Zum Schluß werden Anwendungen der Homologie- und Fixpunkteigenschaften von lokalzusammenhängenden Räumen gegeben. Insbesondere wird die Lefschetzsche Fixpunktformel auf solche Räume erweitert.

*P. Alexandroff* (Moskau).

**Alexander, J. W.:** On the homology groups of abstract spaces. Ann. of Math., II. s. 35, 130—151 (1934).

Theorie der „bewerteten“ Abelschen Gruppen. Eine Bewertung einer Abelschen Gruppe entsteht, wenn jedem Element  $x$  der Gruppe eine nicht-negative Zahl  $N(x)$  zugeordnet wird, die dann und nur dann Null ist, wenn  $x$  das Nullelement der Gruppe ist, und die der Bedingung genügt: aus  $N(x) > N(x')$  folgt  $N(x + x') = N(x)$ . Solche Bewertungen lassen sich insbesondere für die Homologiegruppen kompakter metrischer Räume einführen. Es wird bewiesen, daß jede bewertete Gruppe einen nulldimensionalen metrischen Raum mit  $\rho(x, x') = N(x - x')$  bildet. Man kann also in einer bewerteten Gruppe alle Stetigkeitsbegriffe einführen. Vor allem werden die vollständigen (im Sinne der soeben eingeführten Metrik) bewerteten Gruppen untersucht. Es wird gezeigt, daß die Faktorgruppe einer vollständigen Gruppe nach einer abgeschlossenen Untergruppe vollständig ist, ferner, daß jede vollständige Gruppe Faktorgruppe einer freien Gruppe nach einer abgeschlossenen (freien) Untergruppe ist. Dabei werden die freien Gruppen mittels des Basisbegriffs eingeführt (freie Gruppe ist definitionsgemäß eine solche, die eine freie Basis besitzt; es ergibt sich dabei, daß jede abgeschlossene Untergruppe einer freien Gruppe frei ist). Der Basisbegriff beruht auf dem Begriff einer konvergenten Linearform  $\sum a_\alpha x_\alpha$  als einer solchen, in der die Anzahl der  $x_\alpha$  mit von Null verschiedenen Koeffizienten und  $N(x_\alpha) \geq \frac{1}{m}$  bei jedem  $m$  endlich ist. Von einer Basis wird sodann verlangt, daß jedes Element der Gruppe als konvergente Linearform in den Basiselementen dargestellt werden kann, und daß die Elemente, die als Linearkombinationen der Basiselemente  $x_\alpha$  mit  $N(x_\alpha) < \frac{1}{m}$  dargestellt werden können, eine Umgebung des Nullelements der Gruppe bilden. — Des weiteren werden Beziehungen zwischen Gruppen und (unendlichen) Matrizen aufgestellt, wobei insbesondere Bedingungen für stetige Homomorphismen und Isomorphismen gewonnen werden. Diese Bedingungen erlauben u. a. die Frage nach der Klassifikation der Homologiegruppen kompakter metrischer Räume auf die Resultate von Ulm [Math. Ann. 107, 774—803 (1933); dies. Zbl. 6, 150] zurückzuführen und sie auf diese Weise zu lösen.

*P. Alexandroff* (Moskau).

**Harry, C. H.:** Concerning the geometry of acyclic sets. Amer. J. Math. 56, 233 bis 253 (1934).

In einer Menge  $M$  beliebiger Elemente sei eine 3-stellige Relation  $ABC$  zwischen den Elementen definiert mit folgenden Eigenschaften: 0. aus  $ABC$  folgt  $A \neq B \neq C \neq A$ ; 1. aus  $ABC$  folgt  $CBA$ ; 2. wenn  $A$ ,  $B$  und  $C$  verschieden sind, so besteht mindestens eine der drei Relationen  $ABC$ ,  $BCA$ ,  $CAB$ ; 3. aus  $ABC$  und  $BCA$  zusammen folgt  $CAB$ ; 4. gilt  $AXB$ , jedoch  $XBA$  nicht, und  $XC B$  oder  $XBC$ , so gilt  $AXC$ , während  $XCA$  falsch ist. Verf. definiert nun zyklische Elemente, Zerlegungspunkte usw. und beweist darüber eine Reihe von Sätzen. Diese Begriffe und Sätze fallen mit solchen von G. T. Whyburn (Amer. J. Math. 50, 167) zusammen, wenn  $M$  ein zusammenhängender Raum ist und man für seine Punkte die Relation  $ABC$  folgendermaßen definiert: trennt der Punkt  $B$  die Punkte  $A$  und  $C$ , so gelten  $ABC$  und  $CBA$  und



nur diese Relationen; trennt von den Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  keiner die beiden anderen, so bestehen zwischen ihnen alle sechs denkbaren Relationen. — Ist  $M$  ein metrisch-separabler Raum, so formuliert Verf. vier weitere (die Relation  $ABC$  mit den Raumeigenschaften verknüpfende) Axiome, welche  $M$  homöomorph machen zu einer Teilmenge eines Baumes (d. h. eines stetigen Streckenbildes ohne geschlossene Teilkurve).

Nöbeling (Erlangen).

**Whyburn, G. T.:** Non-alternating transformations. Amer. J. Math. **56**, 294—302 (1934).

Eine stetige Abbildung  $f$  eines kompakten metrischen Raumes  $A$  auf einen kompakten metrischen Raum  $B$  heißt nicht-alternierend, wenn bei keiner Wahl der beiden Punkte  $x$  und  $y$  von  $B$  die Urbildmengen  $f^{-1}(x)$  und  $f^{-1}(y)$  einander trennen [in dem Sinne, daß für irgendeine Zerlegung  $A - f^{-1}(x) = A_1 + A_2$  man  $A_1 \cdot f^{-1}(y) \neq \emptyset \neq A_2 \cdot f^{-1}(y)$  hat]. Eine nicht-alternierende Abbildung heißt monoton, falls die Urbildmengen der Punkte von  $B$  zusammenhängend sind. — Es werden charakteristische Eigenschaften der nicht-alternierenden und der monotonen Abbildungen insbesondere für den Fall lokal-zusammenhängender Räume untersucht und zahlreiche Anwendungen auf spezielle Gebilde (Baumkurven usw.) gemacht. Es werden auch Beziehungen zu zyklischen Elementen, Unikohärenz, retrahierenden Abbildungen u. dgl. aufgestellt.

P. Alexandroff (Moskau).

**Čech, E.:** Sur la décomposition d'une pseudovariété par un sous-ensemble fermé. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1342—1345 (1934).

Es wird zuerst ein sehr allgemeiner Satz über Zerlegungen kompakter metrischer Räume durch ihre abgeschlossenen Teilmengen bewiesen. Als Spezialfall dieses Satzes erhält man folgendes Theorem: es sei  $R$  eine  $n$ -dimensionale geschlossene Cantorsche Mannigfaltigkeit,  $S$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $R$ . Die  $n$ -te Bettische Zahl von  $R$  sei  $m$ , die  $(n - 1)$ -te Bettische Zahl von  $S$  sei  $q$ . Dann besteht  $R - S$  aus höchstens  $q:m + 1$  Komponenten. [Dieser Satz bildet eine Verschärfung eines Resultats von Wilder, Math. Ann. **109**, 273—306, Satz 6 (1933); dies. Zbl. **8**, 87.] — Des weiteren führt der Verf. den Begriff einer  $m$ -fach verzweigten  $n$ -dimensionalen Pseudovarietät ein (falls  $m = 1$  ist, heißt die Pseudovarietät einfach). Das ist ein  $n$ -dimensionaler kompakter Raum mit  $m$  Zyklen der Dimensionszahl  $n$ , die für alle Punkte des Raumes eine lokale Basis bilden und einer gewissen Unabhängigkeitsbedingung genügen. Alle Pseudovarietäten erweisen sich als lokal zusammenhängend. Sie umfassen als Spezialfall die von Wilder entdeckten gemeinsamen Begrenzungen von mehr als 2 unbewallten Gebieten des  $R^n$  ( $n \geq 3$ ). Über die Zerlegung der Pseudovarietäten durch ihre abgeschlossene Teilmenge wird eine Reihe weitgehender Sätze bewiesen. — Zum Schluß wird der Erreichbarkeitsbegriff wesentlich verschärft, indem eine Zahl, die Ordnung der Erreichbarkeit, eingeführt wird. Für diese wird in weitgehenden Spezialfällen ein Invariansatz bewiesen.

P. Alexandroff.

## Mechanik.

**Kasner, Edward:** General theorems on trajectories and lines of force. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **20**, 130—136 (1934).

A heavy particle is projected in a field of force at a point  $P$  in the direction of the line of force through  $P$  with an initial velocity  $v$ . Several theorems are proved concerning the differential geometric properties of the trajectory and line of force at  $P$ . A typical result in the case  $v = 0$  is that the curvature of the trajectory is one third the curvature of the line of force. The paper includes results for  $v \neq 0$  and the case when the line of force has  $n^{\text{th}}$  order contact with its tangent at  $P$ .

Lewis.

**Pleijel, Åke:** Sur la théorie des corps centrobaires. Ark. Mat. Astron. Fys. **24 B**, Nr 12, 1—6 (1934).

Die Körper  $K$  und  $L$  mögen sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen;  $O$  sei ein fest mit  $K$  verbundener Punkt.  $K$  heißt centrobär bezüglich  $L$  mit  $O$  als Mittelpunkt,

wenn das auf  $O$  reduzierte Moment der von  $L$  auf  $K$  ausgeübten Kräfte bei jeder relativen Lage von  $K$  und  $L$  verschwindet. — Beweisskizze dafür, daß  $K$  dann auch bezüglich aller Körper centrobär ist, und daß die homogene Vollkugel der einzige stetig gekrümmte, homogene, centrobare Körper ist. *Willy Feller* (Kopenhagen).

**Seonzo, Pasquale:** *Sopra gli sviluppi di alcuni elementi del moto ellittico.* Mem. Soc. Astron. Ital., N. s. **7**, 421—425 (1934).

Entwicklung der mittleren Anomalie einer Planetenbahn in eine Fourierreihe nach Vielfachen der wahren Anomalie und der wahren Anomalie nach Vielfachen der exzentrischen Anomalie. *A. Klose* (Berlin).

**Sciobereti:** *Sur la détermination d'une orbite parabolique par la méthode de Laplace-Leuschner.* C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1350—1352 (1934).

Weiterentwicklung einer Methode von Leuschner zur Auflösung der Fundamentalgleichung des parabolischen Bahnbestimmungsproblems. *Klose* (Berlin).

**Lewis jr., D. C.:** *Sulle oscillazioni periodiche d'un sistema dinamico.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 234—237 (1934).

Die von Birkhoff und dem Verf. in einer früheren Arbeit [Annali di Matematica, s. 4, **12**, 117—133 (1933); dies. Zbl. **7**, 371] angewandte Methode wird jetzt auf den Fall der Nachbarschaft einer Gleichgewichtslage vom allgemeinen stabilen Typus übertragen. Es ergibt sich die Existenz von unendlich vielen kleinen periodischen Bahnen, die um die Gleichgewichtslage viele Umläufe machen, so daß die gefundene Klasse von der Hornschen wesentlich verschieden ist. *Wintner* (Baltimore).

**Hüttenhain, E.:** *Räumliche infinitesimale Bahnen um die Librationspunkte im Geradenfall der (3 + 1)-Körper.* Astron. Nachr. **250**, 297—316 (1933).

Diskussion der Variationsgleichungen in dem im Titel genannten Fall. *Wintner*.

**Graffi, D.:** *Sull'eccentricità dell'orbita nel problema dei due corpi di massa variabile. I.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 144—151 (1934).

Let  $M$  denote the sum of the masses of the two bodies which is assumed to be a decreasing function of the time.  $\varepsilon(t)$ , the eccentricity of the conic section which one of the two bodies would describe with respect to the other if  $M$  were to stop decreasing at time  $t$ , is assumed less than 1 for  $t = 0$ . It is shown that the fluctuation of  $\varepsilon(t)$  is arbitrarily small over a time interval of arbitrary length if  $|d \log M/dt|$  and  $d^2 \log M/dt^2$  are everywhere less than  $\delta$ , where  $\delta$  is a sufficiently small positive number. It also follows from the author's fundamental formula (20) that, if  $M = M_0 e^{-kt}$  (the case to be expected when the bodies lose mass by radiation), then the fluctuation of  $\varepsilon(t)$  in a time interval of length  $(1/k) \log(1/k)$  tends to zero with  $k$ . Thus a negligible change in the eccentricity is not inconsistent with a large proportional decrease in mass. *Daniel C. Lewis jr.* (Baltimore, Md.).

**Graffi, D.:** *Sull'eccentricità dell'orbita nel problema dei due corpi di massa variabile. II.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 228—233 (1934).

After further developing the results of the previous paper (cf. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 144), some numerical applications are made to show how slightly the eccentricity may change even after a long time and with a large decrease in mass. Two laws for the change of the mass  $m$  are treated: one proposed by Armellini,  $dm/dt = -\lambda m$ ; and the other by Jeans,  $dm/dt = -\lambda m^n$  ( $n > 3$ ). (Cf. the preceding report.) *Lewis* (Baltimore).

**Levi-Civita, Tullio:** *A general survey of the theory of adiabatic invariants.* J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **13**, 18—40 (1934).

Überblick über die geschichtliche Entwicklung, das Wesen und die Anwendungen der Theorie der adiabatischen Invarianten. *E. Hopf* (Watertown).

**Appert, Antoine:** *Quelques remarques sur la stabilité à la Poisson au sens de Poincaré.* C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1125—1127 (1934).

Anwendung der Lebesgueschen Maßtheorie auf Bewegungsprobleme. Merkwürdigerweise scheint dem Verf. der „Carathéodorysche Wiederkehrsatz“ [S.-B.



preuß. Akad. Wiss. **32**, 580 (1919)] unbekannt geblieben zu sein, der alle wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden Note enthält. *A. Khintchine* (Moskau).

**Krutkow, G.:** Über den Vereinigungs- und Trennungssatz der statistischen Mechanik. C. R. Acad. Sci. URSS **2**, 549—550 u. dtsch. Text 551—552 (1934) [Russisch].

Einfacher Beweis für den Vereinigungs- und Trennungssatz der klassischen statistischen Mechanik auf Grund einer früher vom Verf. entwickelten Methode zur asymptotischen Berechnung von Phasenausdehnungen [Z. Physik **81**, 377 (1933); dies. Zbl. **6** 280]. *Nordheim* (Paris).

**Narlikar, V. V.:** The Kelvin-Poincaré problem of stellar evolution. Proc. Roy. Soc. London A **144**, 28—39 (1934).

Die Note bringt Rechnungen über den qualitativen Gang der Entwicklung des Maclaurin-Jacobischen Kontinuums sowie des Kontinuums der bereits geteilten Figuren, das von dem Maclaurin-Jacobischen durch den sog. birnenförmigen Zustand getrennt wird. Der Entwicklungsgang wird durch lehrreiche numerische Tabellen illustriert. *Wintner* (Baltimore).

**Larmor, Joseph:** On astronomical evolution by dissipation of dynamical energy. Proc. Roy. Soc. London A **144**, 39—46 (1934).

Betrachtungen über den astronomischen Sinn der Annahmen, die der mathematischen Theorie der Gleichgewichtsfiguren zugrunde liegen. *Wintner*.

**Oseen, C. W.:** Contributions à la théorie des fluides anisotropes. Ark. Mat. Astron. Fys. **24** A, Nr 19, 1—11 (1934).

Die Arbeit stellt einen neuen Versuch dar (vgl. dies. Zbl. **8**, 42), die Wechselwirkung der Moleküle in einer cholesterin-nematischen Struktur modellmäßig zu verstehen. Im Gegensatz zu früheren Versuchen wird dabei das Molekül als unsymmetrischer starrer Körper angesetzt, nicht als zylindersymmetrischer Stab. Daher gehen in die Energie zwischen zwei Molekülen außer den Relativkoordinaten der Schwerpunkte noch drei Eulersche Winkel für die relative Orientierung ein. Doch führt dieser neue Ansatz zu keinem besseren Verständnis der cholesterin-nematischen Zustände. Diese können nämlich nur entstehen, wenn die Energie u. a. abhängt von einer Moleküleigenschaft, die sich transformieren muß wie ein symmetrischer axialer Tensor (Pseudotensor) zweiter Stufe. Ein solcher Tensor läßt sich etwa dadurch konstruieren, daß man dem Molekül ein elektrisches und ein magnetisches Moment  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{S}$  zuschreibt und bildet  $c_{jk} = E_j H_k + E_k H_j$ . Doch hält der Verf. es für modellmäßig schwer verständlich, wie ein solcher Ausdruck in die potentielle Energie eingehen könnte. — Für Benutzer der Arbeit sei noch auf einen offenbaren Druckfehler aufmerksam gemacht: Auf Seite 6 muß die zweite Zeile der Determinante  $D_{jk}$  lauten  $L_1^{(k)'}$ ,  $L_2^{(k)'}$ ,  $L_3^{(k)'}$  statt der entsprechenden ungestrichenen Größen. Nur so ist die Symmetrisierung (17) des Tensors  $D_{jk}$  möglich, ohne daß alle Komponenten identisch verschwinden. *Hermann*.

## Quantentheorie.

**Krbek, F. v.:** Einheitliche Behandlung der verschiedenen Statistiken. Z. Physik **89**, 83—86 (1934).

Die Arbeit enthält nur eine Wiedergabe bekannter quantenstatistischer Überlegungen und liefert kein neues Ergebnis. *Fürth* (Prag).

**Kakesita, Hikotaro:** A method of quantisation of space. (Double conics theory in projective geometry.) Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **16**, 137—150 (1934).

Betrachtungen bzw. Andeutungen über die Möglichkeit, Quantentheorie und Relativitätsgeometrie in Gestalt einer „nichtkommutativen projektiven Geometrie“ zu vereinigen, in welcher Punktkoordinaten  $x_0, x_1, x_2$  und Ebenenkoordinaten  $u_0, u_1, u_2$  unvertauschbar sind:

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 \neq x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2.$$

*P. Jordan* (Rostock).

**Gormley, P. G.:** The wave-equation corresponding to a given Hamiltonian. Proc. Roy. Irish Acad. A 42, 1—6 (1934).

Beschäftigt sich mit der Frage, welche der hinsichtlich der Faktoren-Reihenfolge verschiedenen Matrizen-Hamiltonfunktionen einer vorgegebenen klassisch-kommutativen Hamiltonfunktion zuzuordnen ist — eine Frage, die weder als ein physikalisch noch ein mathematisch sinnvolles Problem darstellend angesehen werden muß.

*P. Jordan* (Rostock).

**Walke, Harold J.:** The deuteron and disintegration. Philos. Mag., VII. s. 17, 793 bis 800 (1934).

Verf. entwickelt eine detailliertere Vorstellung für eine Reihe bekannter Kernumwandlungen auf Grund der Annahme, daß in einem Kern, welcher außer  $\alpha$ -Teilchen noch a) ein Proton und ein Neutron, oder b) 2 Protonen und ein Neutron, oder c) ein Proton und 2 Neutronen enthält, ein Deuteron (= Proton + Neutron) als Kernbestandteil enthalten ist.

*P. Jordan* (Rostock).

**Fermi, Enrico:** Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi „beta“. Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz. 2, 491—495 (1933).

**Fermi, E.:** Versuch einer Theorie der  $\beta$ -Strahlen. I. Z. Physik 88, 161—177 (1934).

Es wird eine Theorie der  $\beta$ -Strahlung vorgeschlagen, in der angenommen wird, daß das emittierte Elektron nicht schon vorher im Kern existiert hat, sondern erst im Augenblick der Emission erzeugt wird. Um die Erhaltung von Energie und Drehimpuls zu ermöglichen, wird außerdem angenommen, daß ein Partikel (Neutrino) ohne Ladung, mit einer Masse von der Größenordnung der Elektronenmasse oder kleiner, und mit einem Spin  $\frac{1}{2} \hbar/2\pi$  gleichzeitig emittiert wird. Unter allen möglichen Ansätzen, die die Wahrscheinlichkeit einer solchen Emission zu beschreiben gestatten, wird die einfachste gewählt, bei der die Wahrscheinlichkeit im wesentlichen proportional zur Größe der Eigenfunktion des Elektrons und des Neutrinos am Ort des Kerns ist. Aus diesem Ansatz ergibt sich eine Relation zwischen der Maximalenergie des  $\beta$ -Spektrums und der Lebensdauer, die experimentell für etwa die Hälfte aller radioaktiven Kerne gut bestätigt wird. Die andere Hälfte zeigt Lebensdauern, die etwa 100mal größer sind, als nach dieser Regel zu erwarten ist; auch dies kann theoretisch gedeutet werden, indem für diese Kerne angenommen wird, daß eine annähernd gültige Auswahlregel durchbrochen ist. Die Form der Energieverteilungskurve wird angegeben. Sie hängt noch davon ab, was man über die Masse des Neutrinos annimmt, und es zeigt sich, daß, soweit die bisherigen Experimente einen Schluß zulassen, der Wert Null der Neutrino-masse die Kurven am besten darstellt.

*R. Peierls* (Manchester).

**Brown, F. W., and J. H. Bartlett jr.:** Hyperfine structure of fluorine. Physic. Rev., II. s. 45, 527—537 (1934).

Es wird mit Hilfe der von Breit und Doermann zur Deutung der Hyperfeinstruktur des Lithiums entwickelten Methode die Hyperfeinstruktur des Fluors quantitativ untersucht. Das Atomfeld wird nach der Hartreeschen Methode berechnet. Aus der experimentell für zehn verschiedene Terme gefundenen Aufspaltung ergibt sich im Mittel ein magnetisches Kernmoment von etwa drei Kernmagnetonen.

*Kronig.*

**Bleick, Willard E., and Joseph E. Mayer:** The mutual repulsive potential of closed shells. J. chem. Phys. 2, 252—259 (1934).

Die Energie eines Systems aus zwei Atomen mit je einer Schale von acht Elektronen ( $s^2 p^6$ ) wird als Funktion des Abstandes nach dem Heitler-Londonschen Verfahren durch Integrale über die Eigenfunktionen ausgedrückt. Mit den einem Hartreefeld für Ne entsprechenden Eigenfunktionen wird die Energie für einige Werte des Abstandes numerisch ausgerechnet.

*F. Hund* (Leipzig).

**Rosenthal, Jenny E.:** Vibrations of tetrahedral pentatomic molecules. Pt. I. Potential energy. Pt. II. Kinetic energy and normal frequencies of vibration. Physic. Rev., I. s. 45, 538—544 (1934).

Es wird darauf hingewiesen, daß bei Annahme eines harmonischen Kraftgesetzes



und bei Berücksichtigung der Symmetrie die potentielle Energie eines Tetraeder-moleküls  $XY_4$  als Funktion der Kernlagen durch fünf unabhängige Konstanten bestimmt wird. Bei einem Valenz- oder Zentralkraftsystem ist die Zahl der unabhängigen Konstanten kleiner, da hier Beziehungen zwischen den fünf allgemeinen Konstanten bestehen. (Teil I.) Ferner werden die Säkulargleichungen für die Frequenzquadrate solcher Moleküle aufgestellt, in denen verschiedene Anzahlen der  $Y$ -Moleküle durch Isotope ersetzt sind. Dabei läßt sich der Grad der Säkulargleichung mit Hilfe der Symmetrie, die für verschiedene Substitutionsprodukte verschieden ist, wesentlich reduzieren. (Teil II.) *E. Teller (Kopenhagen).*

**Gombás, Pál: Theoretische Untersuchungen über die Dynamik des Lithiumbromidkristalls.** Mat. fiz. Lap. 41, 55—85 u. dtsch. Zusammenfassung 86 (1934) [Ungarisch].

Es werden die Konstanten des Lithiumbromidmoleküls und des Lithiumbromidkristalls auf theoretischem Wege, ohne Benutzung empirischer Konstanten berechnet. Die Rechnung geschieht nach dem Störungsverfahren, wobei die Grundzustände von  $Li^+$  und  $Br^-$  den Ausgangspunkt bilden.  $Li^+$  wird seinerseits mit Hilfe der Hylleraas-schen Zweielektronenfunktionen beschrieben, während  $Br^-$  nach der Thomas-Fermischen Methode behandelt wird, die in der von Lenz und Jensen angegebenen abgeänderten Form auch auf negative Ionen anwendbar ist. Die Resultate stimmen mit dem Experiment bis auf wenige Prozente überein. *E. Teller (Kopenhagen).*

**Ostermann, Hans: Über den Paramagnetismus des Elektronengases.** Z. Physik 89, 68—82 (1934).

Aus der Annahme eines paramagnetischen Elektronengases werden thermodynamisch folgende elektrische Erscheinungen abgeleitet: 1. Einem geerdeten Metallstück, das in ein Magnetfeld gebracht wird, fließt eine Elektronenaufladung zu. 2. Die dadurch entstehende Potentialdifferenz zwischen verschiedenen magnetisierten Teilen desselben Leiters wird meßbar als Thermokraft, die etwa auftritt, wenn ein Metalldraht sich zum Teil in einem Magnetfeld befindet und die beiden Austrittsstellen aus dem Feld (sie entsprechen den Lötstellen eines Thermoelements) auf verschiedener Temperatur gehalten werden. — Der Betrag der beiden Effekte für Kupfer wird sowohl nach der klassischen wie nach der Fermi-Statistik berechnet, wobei letztere 4 bzw. 6 Zehnerpotenzen kleinere Werte ergibt. — Experimentell wird der 2. Effekt mit einer geistreichen Multiplikationsanordnung gesucht, bei der die 400 Windungen einer Spule je zweimal das Feld eines Elektromagneten durchsetzen, wobei Ein- und Austrittsstellen gekühlt bzw. geheizt werden. Tatsächlich lieferten die Versuche eine Thermokraft (etwa  $10^{-10}$  Volt/Grad bei  $2 \cdot 10^4$  Oersted) vom richtigen Vorzeichen, aber von einem Betrag, der um mehrere Größenordnungen den nach der Fermi-Statistik berechneten übertrifft, wofür die Aufklärung noch fehlt. *E. Vogt (Marburg/Lahn).*

**Weizsäcker, C. F. v.: Ausstrahlung bei Stößen sehr schneller Elektronen.** Z. Physik 88, 612—625 (1934).

Die Ausstrahlung eines Elektrons beim Zusammenstoß mit einem Kern wird in folgender Weise berechnet: Es wird ein Koordinatensystem eingeführt, in dem das Elektron anfangs ruht. In diesem Koordinatensystem läßt sich das Coulombfeld des Kernes näherungsweise darstellen als Superposition ebener Wellen, und die Streuung dieser Wellen am Elektron kann mit Hilfe der Klein-Nishina-Formel bestimmt werden. Die Voraussetzungen für die Gültigkeit dieses Verfahrens werden diskutiert. Innerhalb der verwendeten Näherung sind die Ergebnisse identisch mit den Rechnungen von Heitler und Sauter (Nature 132, 892 (1933); dies. Zbl. 8, 140) und Heitler und Bethe (noch nicht veröffentlicht).

*Casimir (Leiden).*

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

**Gauzit, J.: Au sujet d'une discussion théorique sur la distribution de l'ozone dans l'atmosphère et l'Umkehrseffekt.** C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1800—1802 (1934).

Ch. L. Pekeris hatte in einer Arbeit (vgl. dies. Zbl. 8, 285) die Unrichtigkeit der

Theorien von Chalonge und Götz über den sog. Umkehreffekt im zerstreuten Zenitlicht im Gebiet der Ozonabsorption nachzuweisen geglaubt. Gauzit findet die Beweisführung ungenügend. Die Rechnung, die Pekeris in bezug auf die primäre Zerstreuung ausgeführt hat, setzt eine gewisse Ungleichheit voraus, die nicht von vornherein evident ist. Ebenso ist die Kritik von Pekeris an der Götzschen Berechnungsweise nicht zutreffend; denn der von Götz berechnete Ausdruck für  $\log I/I'$  hat eine physikalische Bedeutung, so daß er ohne Bedenken auch auf die von Pekeris angefochtenen Umstände anwendbar ist.

P. Gruner (Bern).

**Griessbach, Karl: Entropieänderungen bei atmosphärischen Vorgängen.** Ann. Hydrogr. 62, 59—62 (1934).

Es werden Ausdrücke für die Entropie unter Zugrundelegung der Gleichung von van der Waals, der Gleichung für ideale Gase und der allgemeinen Zustandsgleichung diskutiert. Insbesondere wird betont, daß auch bei Anwendung der van der Waalsschen Gleichung auf die Entropie eines chemisch homogenen Körpers kein von der Temperatur unabhängiges Glied auftreten kann. Betrachtet man die Luft als ideales Gas und beschränkt sich auf Temperatur- ( $T$ ) und Dichte- ( $\varrho$ ) Abweichungen, verursacht durch Turbulenz, so hat man für die Entropiedifferenz zwischen momentanem und stabilem Zustand

$$S - S_0 = -\frac{1}{2} \left[ C_v \left( \frac{T - T_0}{T_0} \right)^2 + R \left( \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} \right)^2 \right]$$

(Index 0 bedeutet Volummittel gemäß dem Gradienten, die Striche geben die Mittelbildung an,  $C_v$  spez. Wärme bei konstantem Druck,  $R$  Gaskonstante). Aus der Formel wird geschlossen, daß im Falle  $\varrho = \varrho(p)$  irreversible, im Falle  $\varrho = \varrho(p, T)$  reversible Zustandsänderungen zu erwarten sind.

B. Haurwitz (Cambridge).

**Kawasumi, Hiroshi: Study on the propagation of seismic waves. II. Amplitude of seismic waves with the structure of the earth's crust and mechanisms of their origin.** Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 11, 403—452 (1933).

The author treats the problem of deducing the mechanism of the source of an earthquake from observed distributions of initial motions in the  $P$  and  $S$  phases. After a comprehensive review of previous investigations (Part I.), the author employs general solutions expressed in polar coordinates for the motion of an infinite, uniform isotropic medium. The irrotational and equivoluminal parts of the displacement are derived respectively from scalar and vector potential functions expressed in the form of the sum of products of Hankel functions of the second kind, and surface harmonics

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^h \frac{A_{nm}}{\sqrt{r}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi + \epsilon).$$

(Here  $k$  is the ratio of the  $2\pi$  frequency to the velocity of either of the two elastic waves.) — The components of motion associated with the potentials of this type are separately considered for the terms in the above series (I)  $n = 0$ , (II)  $n = 1$ ;  $m = 0, 1$ , (III)  $n = 2$ ;  $m = 0, 1, 2$ , and for certain combinations of these terms. In this way, the mechanisms (i. e. types of singularities) at the source are correlated with suitable combinations of the general solutions. In Part III, the author considers the effect of crustal inhomogeneity upon the observed motion. To make approximate allowance for the variation of velocity with depth, distances along the curved ray path of propagation are substituted for radial distance from the hypocentre. Also the velocity parameters in the final formulae of motion are now arbitrarily considered to be variable instead of constant, as a first approximation. On this basis it appears that surface amplitudes should vary inversely as the time of travel involved. This result checks the usual and more precise method of calculating surface amplitudes within a maximum error of 12% at epicentral distances less than  $10^\circ$ . The effect of discontinuities at crustal layers upon wave amplitudes is allowed for in the usual way. As an example of the application of the foregoing results, in Part IV an analysis of the motions of the



deep-seated Central Japan earthquake of June 2nd, 1931, is made. A theory of the mechanism of this quake at its origin is developed in detail. The energy, amplitudes, and stress distributions near the hypocentre are deduced from the surface observations. It is found that stresses in excess of the strength of rocks are indicated at distances less than 2 km. from the hypocentre. *Slichter (Cambridge).*

**Wilberforce, L. R.: Magnetized ellipsoids and shells in a permeable medium.** *Proc. Physic. Soc., London* **46**, 312—317 (1934).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **6**, 275) wird für ein gleichförmig magnetisiertes Ellipsoid untersucht, wie sich seine magnetischen Felder in den beiden Fällen verhalten, wenn sich das Ellipsoid im Vakuum befindet, oder wenn es in ein Medium konstanter relativer Permeabilität eingebettet ist. Es ergibt sich, daß die beiden Felder nur dann dieselbe Richtung haben, wenn die Magnetisierungsrichtung mit einer Hauptachse des Ellipsoids zusammenfällt. Das widerspricht einer Verallgemeinerung, die Leigh Page [*Physic. Rev.* **44**, 112 (1933)] aus Untersuchungen über gleichförmig magnetisierte Sphäroide abgeleitet hat, wonach „die Wirkung des Eintauchens eines permanent magnetisierten Körpers irgendeiner Gestalt in ein Medium konstanter magnetischer Permeabilität  $\mu$  darin besteht, daß sich das Feld überall im selben Verhältnis ändert, wobei dieses Verhältnis nur von  $\mu$  und der geometrischen Gestalt des Körpers abhängt.“ Ferner wird bewiesen, daß das Magnetfeld um eine halb-unendliche dünne ebene homogene magnetische Schale mit geradlinigem Rand nicht von der Permeabilität des umgebenden Mediums abhängt. Dasselbe wird wahrscheinlich gemacht für jede, auch nichthomogene magnetische Schale irgendeiner Form, die überall senkrecht zu ihrer Oberfläche magnetisiert ist. *J. Bartels.*

**Chapman, S., and V. C. A. Ferraro: A new theory of magnetic storms.** *Terrestr. Magnet. a. atmosph. Electr.* **36**, 77—97, 171—186 (1931); **37**, 147—156, 421—429 (1932); **38**, 79—96 (1933).

Der wesentlichste neue Gesichtspunkt der Verff. ist die Annahme, daß die erdmagnetischen Stürme nicht an den stationären Zustand einer die Erde umschließenden Ionenwolke gebunden sind, sondern eine Folge der Annäherung weitgehend neutraler Wolken solaren Ursprungs darstellen, für die hinsichtlich Ionendichte und Stromgeschwindigkeit in der Milneschen Emissionstheorie („Herausklettern“ der Ionen aus gewissen Absorptionslinien) eine Erklärungsmöglichkeit vorliegt. Die Verff. untersuchen zunächst die Bahngeometrie derartiger Ströme in homogenen und inhomogenen Magnetfeldern mit dem Ergebnis, daß erst in einigen Erdradien Abstand eine Beeinflussung der Wolke durch das Erdfeld eintritt. Indem hier die induzierten elektrischen Oberflächenströme das Wolkeninnere vom Erdfeld abschirmen, wobei durch die Oberflächenstromschicht die Kraftlinien des Erdfeldes zusammengedrängt werden, tritt eine Bremsung des auf die Erde zu gerichteten Teils der Wolke ein, während die übrigen Partien des Ionenstroms sich ungestört weiter bewegen. Dadurch schließt sich die Wolke hinter der Erde teilweise wieder unter Ausbildung eines westwärts driftenden Stroms, der in den folgenden Tagen abklingt und der für die Erniedrigung der Horizontalintensität während der Hauptphase des magnetischen Sturms und für die Nachstörung verantwortlich ist. Während der Abbremsung der Wolke wird ihre kinetische Energie in magnetische Feldenergie umgesetzt, wodurch sich das Anwachsen der Horizontalintensität in der Initialphase erklärt. Das in den Ionenwolken induzierte primäre Stromsystem liegt nach dieser Theorie der Erde näher als der Birkeland-Störmersche äquatoriale Ringstrom. *H. Ertel (Berlin).*

**Lowan, Arnold N.: Note on the cooling of a radioactive sphere.** *Amer. J. Math.* **56**, 254—258 (1934).

The method of the previous paper (this Zbl. **8**, 331) is applied now to the case in which the initial distribution of temperature is arbitrary. The temperature  $T$  is first replaced by a quantity  $u$  which differs from  $T$  by the product of the medium temperature  $F(t)$  and a certain function of the radius  $r$ . A quantity  $y$  is then derived from  $u$  by



means of the Laplacian integral and is found with the aid of a Green's function which is assumed to be expressible by means of a bilinear expansion. *H. Bateman* (Pasadena).

**Ertel, Hans:** Eine neue Methode zur Berechnung der Eigenschwingungen von Wassermassen in Seen unregelmäßiger Gestalt. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 24/25, 746—750 (1933).

Als einzige einschränkende Voraussetzung wird angenommen, daß der See in der Richtung der  $x$ -Achse eine überwiegende Längserstreckung aufweise, so daß Querschwingungen gegenüber den Longitudinalschwingungen zurücktreten. Durch Variablentransformation geht die Grundgleichung für longitudinale Seiches in

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\varphi(\xi)} \frac{\partial^2 M_x}{\partial t^2} = 0$$

über, wo  $\varphi(\xi)$  die mit einem konstanten Faktor multiplizierte Normalkurve des Sees darstellt und  $M_x$  die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt transportierte Wassermasse ist. Bei Annahme einer konstanten mittleren Breite  $b_m$ , eines mittleren Querschnittes  $Q_m$  und damit mittlerer Tiefe  $h_m$  wird  $\varphi_m = \frac{g h_m}{L^2}$ . Um von den bekannten Lösungen dieses Falles zu Integralen der obigen allgemeinen Gleichung zu gelangen, wird in Anlehnung an die wellenmechanische Störungstheorie ein Störungsterm eingeführt, der den Abweichungen des Sees von den konstanten Verhältnissen Rechnung trägt. Da die inhomogene Gleichung nur dann eine Lösung besitzt, wenn der Störungsterm orthogonal auf der Lösung der homogenen Gleichung ist, ergibt sich für die  $n$ -te Eigenfrequenz

$$v_n^0 = (v_n^0)^2 \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{\varphi_m} (X_n^0)^2 d\xi.$$

$v_n^0$  ist die Eigenfrequenz für konstanten Querschnitt und Tiefe,  $X_n^0$  die Lösung der homogenen Gleichung nach Abspaltung des Zeitfaktors. Um die Brauchbarkeit der Methode zu beweisen, wird die „Japanische Theorie“ als Spezialfall der Störungstheorie abgeleitet.

*B. Haurwitz* (Cambridge, Mass.).

**Köhler, Hilding:** Meteorologische Turbulenzuntersuchungen. I. Svenska Vetensk. Akad. Hdl. 13, 1—54 (1933).

Im ersten Teil dieser Arbeit untersucht Verf. dreidimensionale Bewegungen in der Atmosphäre, welche als ideale, inkompressible (Dichtigkeit  $\rho = \text{konst.}$ ) Flüssigkeit betrachtet wird. Die Komponenten der turbulenten Bewegung sind  $\bar{u} + u'$ ,  $\bar{v} + v'$ ,  $\bar{w} + w'$  ( $\bar{w} = 0$ ) mit nur von  $z$  abhängigen mittleren Geschwindigkeiten  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  und Schubspannungen  $-\rho u'w'$ ,  $-\rho v'w'$ . Der mittlere Druck  $\bar{p}$  wird  $\bar{p} = Cx + f(z)$  ( $C = \text{konst.}$ ;  $x$ -Achse ist in die Richtung des Gradienten gelegt). Für  $\bar{c} = \bar{u} + i\bar{v}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) erhält Verf. die Gleichung:  $\frac{d}{dz} \eta \frac{d\bar{c}}{dz} = C + i\lambda \rho \bar{c}$  ( $\lambda = 2\omega \sin \varphi$ ,  $\varphi$  = die geographische Breite,  $\omega$  = Rotationsgeschwindigkeit der Erde), wo  $\eta = \rho w' l$  und  $l$  eine Verallgemeinerung des Prandtlschen Mischungsweges oder der Taylorschen [Proc. London Math. Soc. 20, 196 (1922)] Größe „ $l$ “, ( $u' + iv' = -l \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}$ ) ist. Danach nimmt Verf., um die Verhältnisse in der Bodennähe zu untersuchen,

$$\eta = \eta_0 e^{i\mu} z^{\frac{p}{p+1}}$$

dies gibt  $-\rho \bar{u}'w' = \eta_0 \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \cos \mu - \frac{d\bar{v}}{dz} \sin \mu \right) \cdot z^{\frac{p}{p+1}}$ ,  $-\rho \bar{v}'w' = \eta_0 z^{\frac{p}{p+1}} \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \sin \mu + \frac{d\bar{v}}{dz} \cos \mu \right)$

und kommt zur Lösung der Gleichung für  $\bar{c}$ , welche durch Besselsche und Hankelsche Funktionen dargestellt wird. Diese Lösung wird in der Bodennähe (untere 30—50 m) untersucht; nur die ersten Glieder sind dabei zu betrachten. Die verschiedenen Werte von  $p$  ( $p = 1, 2, 3, \dots, 8$ ) und  $\mu$  werden betrachtet und folgende wichtige Resultate



gefunden:  $\alpha$  ist unabhängig von  $\varphi$  ( $\alpha = \frac{\pi}{2(p+2)} - \frac{\mu}{p+2} - \frac{\pi}{2}$ ). Um die meteorologische Bedeutung der Größe  $\mu$  näher zu studieren, werden die Beziehungen zwischen  $p$ ,  $\mu$  und  $\alpha$  ausführlich besprochen ( $\eta_0$  ist aus der Behandlung der Richtungen der Reibungskraft zu ermitteln); die Rolle des Wertes  $\mu$  als einer speziellen Turbulenzcharakteristik wird diskutiert. — Der zweite Teil der Arbeit ist der Lösung der Austauschgleichungen  $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial s}{\partial z} \right)$  ( $\eta = \text{konst. } z^{\frac{p}{p+1}}$ ) unter allgemeinen Randbedingungen ( $s = \varphi(t)$  bei  $z = 0$ ,  $s = f(z)$  bei  $t = 0$ ) gewidmet; als Spezialfälle werden auch einzelne Annahmen über  $\varphi$  und  $f$  gemacht. Die Resultate dieses zweiten Teiles sind im wesentlichen früher vom Verf. [Köhler, H., Beitr. Physik frei. Atmosph. **19**, 91 (1932); dies. Zbl. **4**, 140] gegeben worden. *J. Kiebel (Leningrad).*

**Smoljakow, P. T.:** Über die theoretischen Grundlagen der Exner- und Defantschen Regeln. (*Wetterbüro, Kazan.*) J. Geophys., Moskau **3**, 46—64 u. dtsch. Zusammenfassung 64 (1933) [Russisch].

Ein polemischer Artikel, welcher der Kritik der Ableitung der Exner-Defantschen Regel gewidmet ist. *J. Kiebel (Leningrad).*

**Letzmann, Johannes:** Die konvektive Labilität in der Atmosphäre. Ann. Hydrogr. **62**, 192—194 (1934).

Die Stabilität  $S$  wird zunächst durch einen Ausdruck dargestellt, in den neben der horizontalen auch die vertikale Dichtedifferenz eingeht:  $S = (\varrho_a - \varrho')/(\varrho_0 - \varrho')$ , wo  $\varrho_a$  die Dichte im aufsteigenden Strom,  $\varrho'$  die in der Umgebung und  $\varrho_0$  die am Boden ist. Die Stabilität ist also ein dimensionsloser Ausdruck, gegeben durch das Verhältniss der Dichteunterschiede in der horizontalen und vertikalen Richtung. Wenn wir nach der Höhe differenzieren und einige Umformungen durchführen, kommen wir sowohl im adiabatischen als auch im nichtadiabatischen Fall zu dem Ausdruck:

$$S = (\gamma_a - \gamma')/(\gamma_k - \gamma');$$

$\gamma_a$  = Gradient im aufsteigenden Strom,  $\gamma'$  = Gradient der umgebenden Luftmasse und  $\gamma_k$  = kritischlabiler Gradient. Eine graphische Darstellung veranschaulicht die Gebiete von stabilem und labilem Gleichgewicht. Ist  $S$  positiv, dann herrscht Stabilität, bei negativem  $S$  hingegen Labilität. *F. Hänsch (Hannover).*

**Philipps, H.:** Zur verkürzten Berechnung des Widerspruches Laplacescher Gleichungen. Z. Vermessungswes. **63**, 193—198 (1934).

Für die Ausgleichung eines astronomisch-geodätischen Netzes ist die Kenntniss der Widersprüche der einbezogenen Laplaceschen Gleichungen erforderlich. Die Größe der Widersprüche ist ein Maß für die Güte der Messungen und für die Grösse des im Netz vorhandenen Zwanges. Verf. gibt unter Umgehung von Koordinatenberechnungen eine einfache Formel zur abgekürzten Berechnung des Widerspruches Laplacescher Gleichungen mit einer Genauigkeit, die für alle in der Praxis vorkommenden Fälle ausreicht. Mit Hilfe dieser Formel ist es möglich, die Güte und Brauchbarkeit älterer Messungen in Laplaceschen Punkten zu überprüfen oder festzustellen, um welche Beträge die früher gerechneten Widersprüche bei Verwendung neuerer Messungen und insbesondere bei Anwendung einer zwangsfreien Ausgleichung zurückgehen. *Schmehl (Potsdam).*

**Solaini, L.:** Su di un caso particolare del problema del vertice di piramide. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 242—248 (1934).

Verf. betrachtet das Problem des einfachen Rückwärtseinschneidens im Raume in dem besonderen Falle, daß einer der drei gegebenen Punkte unendlich entfernt sei (z. B. Richtung der Sonne), und zwar unter Benutzung der Formeln für den allgemeinen Fall sowie mit Angabe einer vereinfachten Lösung. *Bossolasco (Turin).*

**Poivilliers, Georges:** Propriété perspective de certaines surfaces et son application aux levés phototopographiques aériens. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1845—1847 (1934).